现代数学基础丛书 94

巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用

王玉文 著

哈尔滨师范大学优秀专著出版基金资助

科学出版社

北京

内 容 简 介

Banach 空间中线性算子的广义逆是空间 R^n 中矩阵广义逆与 Hilbert 空间中线性算子的广义逆的实质性推广. 本书介绍 Banach 空间中线性算子的线性斜投影广义逆、Drazin 广义逆、度量广义逆及齐性广义逆的基础理论, 重点介绍线性斜投影广义逆在大范围分析、非线性分析、非线性数值逼近中的应用及度量广义逆在不适定(偏)微分方程边值问题中的应用. 书中突出了 Banach 空间几何方法的运用.

本书可供高等院校数学与应用数学专业的高年级学生、研究生、教师及数学工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用/王玉文著. —北京: 科学出版社, 2005
(现代数学基础丛书;94)

ISBN 7-03-014666-2

Ⅰ. 巴… Ⅱ. 王… Ⅲ. 巴拿赫空间-算子-广义逆 Ⅳ. O177.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 124389 号

责任编辑: 吕 虹 张 扬/责任校对: 鲁 素
责任印制: 钱玉芬/封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2005年1月第一版 开本: B5(720×1000)
2005年1月第一次印刷 印张: 14 1/2
印数: 1—2 500 字数: 266 000

定价: 35.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了十余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约40卷，后者则逾80卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献．

杨　乐

2003年8月

前　言

广义逆理论是应用十分广泛的数学分支. 它在数值线性代数、数值分析、最优化、控制论、数理统计、微分方程及应用数学中具有引人注目的应用. 用算子理论的术语来说，当一个算子不是双射时，其逆算子不存在，此时就应讨论其广义逆. 涉及到这样算子的算子方程，一般不存在通常意义下的解，但这种算子方程却具有某种特定意义下的解，例如：最小二乘解或最小范数解等等. 为了不同的应用目的，人们依据不同的条件，引入各种不同的广义逆.

1920 年, E. H. Moore[Mo] 推广了非奇异方阵的逆矩阵的概念, 对任意的矩阵, 引入广义逆矩阵的概念. Moore 将 $m\times n$ 矩阵 A 的广义逆定义为满足条件 $AG=P_A$ 且 $GA=P_G$ 的 $n\times m$ 矩阵 G, 这里 P_X 为矩阵 X 的列向量所张成子空间上的正交投影算子.

1955 年， R. Penrose[Pe1] 证得：存在唯一矩阵 B, 满足下面的四个矩阵方程：

$$ABA=A,\quad BAB=B,\quad (AB)^*=AB,\quad (BA)^*=BA. \tag{0.1}$$

这些条件等价于 Moore 的条件. 满足这些条件的唯一矩阵 B 被称之为 A 的 Moore-Penrose 广义逆，且记为 A^+. 由于矩阵的 Moore-Penrose 广义逆与求解最小二乘解有关，因而得到广泛的研究.

1958 年， M. P. Drazin[Dr] 引入矩阵 A 的 Drazin 逆 A^D, 可以应用于从系统的当前给定状态重新发现其过去状态的“向后投影问题”.

在过去的近 40 年中，许多作者提出并研究了从一个线性空间到另一个线性空间线性变换的各种类型的广义逆. 当线性空间赋予拓扑结构后，这种研究就会变得更加复杂. 参见 20 世纪 70 年代至 80 年代初出版的有关专著 [BG, Na1, CM, Gr, Ca] 及所列的参考文献.

Hilbert 空间中线性算子的广义逆研究，是由 E. H. Moore 的学生，南京大学教授曾远荣 (Y. Y. Tseng) 先生所开始的. 1933 年，曾远荣先生引入了 Hilbert 空间中线性算子的广义逆的概念 [Ts1], 这种广义逆国际上称之为 Tseng 广义逆. 曾远荣先生又发表了这方面的四篇奠基性论文 [Ts2～Ts4].

如果 T 为 Hilbert 空间之间的有界线性算子 T, 则 T 的 Moore-Penrose 广义逆 T^+ 定义为下面四个算子方程的唯一解：

(i) $TT^+T=T$,

(ii) $T^+TT^+=T^+$,

(iii) $(TT^+)^*=TT^+$,

(iv) $(T^+T)^*=T^+T$

(见 [Gr] 或 [WWQ]). Hilbert 空间中无界线性算子的 Moore-Penrose 广义逆可类似

定义 (见 [Na1]).

利用 Hilbert 空间中闭稠定线性算子 T 的 Moore-Penrose 广义逆 T^+, J. Locker 构造了 n 阶线性微分方程两点边值问题的最小二乘解及 n 阶线性微分算子的广义 Green 函数 (见 [Jo1~Jo4]).

1983 年, S. J. Lee 与 M. Z. Nashed 在 Hilbert 空间中为多值线性算子引入正交广义逆的概念 (见 [LN1~LN3]). 进而在 1989 年, 他们又构造了 Hilbert 空间中线性包含的约束最小二乘解, 并研究了 Hilbert 空间中奇异最优控制问题 (见 [LN4]).

1990 年, 1992 年, 马吉溥、曹伟平、宋国柱研究了 Hilbert 空间中 Moore-Penrose 广义逆 A_x^+ 的连续性 [MCS,Ma1]. 近 20 年, Hilbert 空间中 Drazin 广义逆的研究获得了长足发展. 见 [Wag1] 及王国荣、魏益民、乔三正于 2004 年出版的专著 [WWQ].

Banach(巴拿赫) 空间中线性算子的广义逆的研究更为复杂.

设 X, Y 为 Banach 空间, T 为从 X 到 Y 的有界线性算子或闭稠定的线性算子. 假定 T 的零空间 $N(T)$ 在 X 中拓扑可补, 且 T 的值域的闭包 $\overline{R(T)}$ 在 Y 中拓扑可补, 即分别存在 X, Y 中的闭子空间 M, N 满足

$$X = N(T) \oplus M, \quad Y = \overline{R(T)} \oplus S.$$

用 P 与 Q 分别记沿 M 到 $N(T)$ 与沿 S 到 $\overline{R(T)}$ 上的线性投影算子, M. Z. Nashed 与 G. F. Votrubo[NV] 将与这些投影算子相关的线性斜投影广义逆 $T^+_{P,Q}$ 定义为线性算子 $(T|_M)^{-1}$, 从 $R(T)$ 到 $R(T) \oplus S$ 上, 保持 $T^+_{P,Q}S = \{\theta\}$ 的线性延拓. 闭稠定线性算子 $T^+_{P,Q}$ 满足下面算子方程

$$\begin{aligned}
&TT^+_{P,Q}T = T, && \text{在 } D(T)\text{上};\\
&T^+_{P,Q}TT^+_{P,Q} = T^+_{P,Q}, && \text{在 } D(T^+_{P,Q})\text{上};\\
&T^+_{P,Q}T = I_{D(T)} - P, && \text{在 } D(T)\text{上};\\
&TT^+_{P,Q} = Q, && \text{在 } D(T^+_{P,Q})\text{上},
\end{aligned}$$

这里 $D(T^+_{P,Q}) = R(T) \oplus S$, $I_{D(T)}$ 为 $D(T)$ 上的单位算子. 简称 $T^+_{P,Q}$ 为 T 的线性投影广义逆.

近十几年中, Banach 空间中线性算子的线性投影广义逆、 Drazin 广义逆及其应用, 得到许多学者的关注. 这方面的研究工作参见 [Na2~Na4, NC, ML, Ra, Ma2~Ma5, Ku, Wag2, CX, Wei1, Cai] 等.

如所周知, Banach 空间中并非每一个闭子空间均拓扑可补 (见 [LT]), 所以 Banach 空间中线性算子可能不存在上述意义下的线性投影广义逆. 另一方面, 在非 Hilbert 空间的 Banach 空间中, 用线性算子的线性斜投影广义逆无法研究 Banach 空间之间线性算子方程的极值解、最小范数解与最佳逼近解. 因此, 需要讨论其它类型的广义逆.

设 X, Y 为 Banach 空间, T 为从 X 到 Y 的线性算子. 设

$$D(T^{\partial}) = \{y \in Y \mid Tx = y \text{ 在 } X \text{ 中具有最佳逼近解}\}.$$

定义集值映射 T^{∂}： $D(T^{\partial}) \rightrightarrows D(T)$ 为

$$T^{\partial}(y) = \{\ x \in X \mid x\text{为 } Tx = y \text{ 的最佳逼近解}\},\quad y \in D(T^{\partial}).$$

T^{∂} 称为 T 的 (集值) 度量广义逆 (见 [Na1]), 单值算子 (一般为非线性) $T^{\sigma}: D(T^{\partial}) \to D(T)$, 如果满足 $T^{\sigma}(y) \in T^{\partial}(y), y \in D(T^{\partial})$, 则称 T^{σ} 为 (集值) 度量广义逆 T^{∂} 的单值选择. 如何得到 (集值) 度量广义逆的具有良好性质的单值选择是一个引人注目的研究课题. 对此， M. Z. Nashed 与 G. F. Votruba 曾在文献 [NV] 中提出研究建议． 2000 年，王玉文和潘少荣 [WP2] 对此进行了研究.

单值度量广义逆已经被许多作者所研究． R. B. Holmes[No1] 研究了 $T^{\partial}(y)$ 永远为单点集时的情形，给出 T^{∂} 为稠定的条件． 1995 年，王玉文与李志伟 [WL1] 对闭稠定线性算子 T, 定义了 (单值) Moore-Penrose 度量广义逆 T^M, 并证得 T^M 的连续性． 2003 年，王辉和王玉文 [WhW] 系统地研究了 Moore-Penrose 度量广义逆 T^M. 王玉文、季大琴和于金凤 [WJ,WY2] 研究了 Banach 空间中线性算子的 Tseng-度量广义逆，不适定二阶椭圆方程 Nuemann 问题.

本书尽可能地收入近 20 年，特别近十几年散见于国内外学术文献的有关 Banach 空间算子广义逆的最新研究成果.

第一章，讨论 Banach 空间中线性投影、度量投影及刚刚引入的拟线性投影，为研究 Banach 空间中线性算子的各种类型广义逆奠定基础.

第二章，介绍 Banach 空间内算子 T 的线性斜投影广义逆 $T^{+}_{P,Q}$, 及其扰动、连续性条件，重点讨论线性斜投影广义逆在逼近论、非线性分析及 Banach 流形中的重要应用.

第三章，讨论 Banach 空间中线性算子的 Drazin 逆，给出 Drazin 逆的几种表示定理、扰动定理及连续性定理.

第四章，首先介绍 Banach 空间中线性算子的 (集值) 度量广义逆的概念，给出其等价定义及有界齐性单值选择. 其次，引入单值的 Tseng 度量广义逆及 Moore-Penrose 度量广义逆的定义，给出其存在性的充要条件及连续性的充分条件. 最后给出度量右逆、度量左逆的形式表达及其应用.

第五章，首先对于 Banach 空间中线性算子的齐性广义逆 (包含线性投影广义逆与单值度量广义逆) 给出统一定义，给出统一的存在性充要条件. 其次，讨论 Banach 空间中多值线性算子的度量广义逆. 利用度量算子部分给出度量广义逆的刻画. 介绍 Hilbert 空间中约束最小二乘解问题及其在奇异最优控制的应用.

第六章，首先讨论 Hilbert 空间中 Moore-Penrose 广义逆在不适定两点边值问题中的应用，构造了两点微分算子的广义 Green 函数. 其次讨论了 Banach 空间中 Moore-Penrose 度量广义逆在半线性二阶椭圆方程的不适定边值问题中的应用，便于讨论奇异最优控制问题.

本书为国家自然科学基金 (10471032) 资助项目成果、其出版得到哈尔滨师范大学优秀专著出版基金资助.

南京大学马吉溥教授引导作者进入 Banach 空间中算子广义逆研究. 谨以此书献给马吉溥教授，纪念先生的 70 寿诞.

博士生刘萍同志及孙秀梅副教授为打印本书的 Latex 书稿付出辛勤的劳动，并认真阅读本书初稿. 科学出版社吕虹编审及相关工作人员为本书的编辑及出版做了大量细致工作，在此一并致谢.

目　录

第一章　Banach 空间中投影算子

Banach 空间中线性算子的不同类型的广义逆，对应不同类型的投影算子．本章将对本书所需要的三种类型投影算子进行介绍．

§1.1　有界线性投影算子

1．代数可补子空间与线性投影算子

设 X 为实 (或复) 的线性空间， X_1 、X_2 为 X 的线性子空间，

$$X_1 + X_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\}$$

称为线性子空间 X_1 与 X_2 的代数和．如果

$$X = X_1 + X_2 \ \text{且}\ X_1 \cap X_2 = \{\theta\},$$

则称为子空间 X_1 与 X_2 代数直和，记为

$$X = X_1 \dot{+} X_2.$$

此时，对每一个 $x \in X$, 有唯一分解

$$x = x_1 + x_2, \qquad x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2.$$

定义 1.1.1　设 $M \subset X$ 为线性子空间, 如果存在线性子空间 N, 使 $X = M \dot{+} N$, 则称 M 在 X 中为代数可补子空间， N 称为 M 的代数补子空间．

定义 1.1.2　设 X 为线性空间．映射 $P: X \to X$ 称为幂等的，是指 $P^2 = P$; 线性幂等映射称为线性投影算子，简称线性投影．

定理 1.1.1　线性空间 X 中每一个线性子空间均为代数可补子空间．

证明　设 M 为 X 的线性子空间，则 M 存在 Hamel 基 $E = \{e_i\}_{i \in I} \subset M$, 且 E 可扩充为 X 上的 Hamel 基 $\overline{E}$, 则由 $\overline{E} \backslash E$ 张成的子空间： $N = \mathrm{span}\{\overline{E} \backslash E\}$, 显然为 M 的代数补子空间，即 $X = M \dot{+} N$.　□

定理 1.1.2　设 X 为线性空间， P 为 X 中的线性投影．令 $N(P) = \{x \in X \mid Px = \theta\}$, $R(P) = \{x \in X \mid Px = x\}$, 则

(i) $R(P) = N(I - P)$;

(ii) $N(P) = R(I - P)$;

(iii) $X = R(P) \dot{+} N(P)$;

(iv) 若 M 、N 为 X 的线性子空间，且 $X = M \dot{+} N$, 则存在唯一的线性投影算子 $P: X \to X$, 满足

$$M = R(P) \ \text{且}\ N = N(P).$$

证明 (i) 因为 $(I-P)P=\theta$, 所以 $R(P)\subset N(I-P)$; 又若对任意 $x\in N(I-P)$, 有 $x=Px\in R(P)$, 因此

$$R(P)=N(I-P).$$

(ii) 因为 $I-P$ 亦为线性投影算子，应用 (i) 立得.

(iii) 对任意 $x\in X$, 有 $x=Px+(I-P)x$, 且 $Px\in R(P),(I-P)x\in R(I-P)=N(P)$, 故 $X=R(P)+N(P)$. 又对任意 $x\in R(P)\cap N(P)$, 则 $x=Px=\theta$, 从而

$$X=R(P)\dot{+}N(P).$$

(iv) 设 $X=M\dot{+}N, M$ 、N 为 X 的线性子空间，则对任意 $x\in X$, 有唯一分解 $x=x_1+x_2$, $x_1\in M, x_2\in N$. 定义 $Px=x_1$, 则易知 P 为 X 中线性投影算子，且 $R(P)=M, N=N(P)$. 若 X 中另一线性投影算子 P_1 满足

$$M=R(P_1)\ \text{且}\ N=N(P_1),$$

则 $X=R(P_1)\dot{+}N(P_1)$. 于是对任意 $x\in X$, 有唯一分解 $x=P_1x+(I-P_1)x$. 由 P 的定义 $Px=P_1x$, 即 $P_1=P_2$. □

2. 拓扑可补子空间与有界线性投影算子

定义 1.1.3 设 M 为赋范线性空间 X 中的闭子空间，如果存在 X 的闭线性子空间 N, 使得 $X=M\dot{+}N$, 则称 M 在 X 中是拓扑可补的， N 称为 M 的拓扑补子空间. 此时，记为 $X=M\oplus N$.

定理 1.1.3 设 X 为 Banach 空间， X 的闭子空间 M 在 X 中拓扑可补当且仅当 M 是某一连续线性投影算子 P 的值域.

证明 必要性. 设 $X=M\oplus N$, 这里 N 为 X 的闭子空间. 由定理 1.1.2 中 (iv), 存在唯一的线性投影算子 P, 使得 $R(P)=M$ 且 $N(P)=N$.

下面只需证 P 为连续的.

设 $x_n\in X$, $x\in X, x_n\to x, Px_n\to y(n\to\infty)$. 由于 M 为闭的， $Px_n\in M$, 所以 $y\in M$, 因此 $Py=y$. 因为 $x_n-Px_n\in N$ 且 N 是闭的，令 $n\to\infty$, 有 $x-y\in N$, 所以 $P(x-y)=\theta$. 因此

$$y=Py=Px.$$

故 P 为闭线性算子. 因为 X 为 Banach 空间，再由闭图像定理，知 P 为连续的.

充分性. 当存在 X 中连续线性投影算子 P 满足 $R(P)=M$ 时，应用定理 1.1.2 中 (iii) 可知

$$X=R(P)\dot{+}N(P).$$

因为 P 与 $I-P$ 为连续的，故 $N(P)$ 及 $R(P)=N(I-P)$ 均为 X 的闭线性子空间，且 $X=R(P)\oplus N(P)$. □

定理 1.1.4 设 M 是 Banach 空间 X 的线性子空间.

(i) 若 $\dim M<\infty$, 则 M 在 X 中拓扑可补;

(ii) 若 $\dim(X/M) < \infty$, 则 M 在 X 中拓扑可补，这里 $\dim(X/M)$ 叫做 M 在 X 中的余维数.

证明 (i) 设 $\dim M = n$. 由于任何 n 维 Banach 空间均拓扑同构，特别， M 与 l_∞^n 拓扑同构，故存在 M 中 n 个线性无关向量 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 及常数 $C > 0$, 使

$$C^{-1} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\alpha_i| \leqslant \|\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\| \leqslant C \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\alpha_j|.$$

令 $\left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, x_j^* \right\rangle = \alpha_j \ (j = 1, 2, \cdots, n)$, 则 $\{x_j^*\}_{j=1}^n \subset M^*$ 且 $\|x_j^*\| \leqslant C, (j = 1, 2, \cdots, n)$. 由 Hahn-Banach 定理，将 $\{x_j^*\}_{j=1}^n$ 保范延拓为 $\{x_j^*\}_{j=1}^n \subset X^*$, 令

$$Px = \sum_{i=1}^n \langle x, x_i^* \rangle x_i, \ \forall x \in X,$$

则 $\|P\| \leqslant nC^2$, 且 P 是 X 到 M 上的有界线性投影算子，故 M 在 X 中拓扑可补.

(ii) 应用定理 1.1.1, 选择 X 的线性子空间 N, 使得

$$X = M \dot{+} N.$$

令 $Q : X \to X/M$ 为商映射，则

$$Q : N \to X/M$$

为一对一的满射. 由于 $\dim(X/M) < \infty$, 故 $\dim N = \dim(X/M) < \infty$, 且 X/M 为 Banach 空间，因此 N 为 X 的闭线性子空间，即 M 在 X 中拓扑可补. □

3.* 在一致凸 Banach 空间中存在拓扑不可补的闭子空间

对于Banach 空间来说，并不是每个闭子空间均为拓扑可补的. 下面构造 Banach 序列空间 $l_p(1 < p < \infty, p \neq 2)$ 的拓扑不可补的闭子空间. 为此，我们引进有关的概念.

定义 1.1.4 设 X 为 Banach 空间， S 为 X 到 X 上的有界线性算子. 如果 $S^2 = I$, 则称 S 是 X 上的对合算子. 集合 $M = \{x \in X \mid Sx = x\}$ 为 S 的不变子空间.

定理 1.1.5 设 X 为赋范线性空间， M 是 X 的闭线性子空间.

(i) 设 P 是 X 到 M 上的连续线性投影算子，则 $S = 2P - I$ 是以 M 为不变子空间的对合算子. 反之，如果 S 是以为 M 为不变子空间对合算子，则 $P = \dfrac{1}{2}(S+I)$ 是 X 到 M 上的连续线性投影算子.

(ii) 如果 $P = \dfrac{1}{2}(S + I)$ 是 X 到 M 上的连续线性投影算子，则所有由 X 到 M 上的连续线性投影算子具有下列形式

$$\widetilde{P} = \frac{1}{2}(S + I + T),$$

其中 S 为以 M 为不变子空间的对合算子， T 为从 X 到 X 中的有界线性算子，且满足

$$ST = -TS = T. \tag{1.1.1}$$

证明　(i) 是显然的.

(ii) 设 $\widetilde{P}$ 为 X 到 M 上的任一连续线性投影算子，则有 $P\widetilde{P} = \widetilde{P}$ 及 $\widetilde{P}P = P$. 如果令 $T = 2\widetilde{P} - (I+S)$, 则 T 为从 X 到 X 中的有界线性算子. 从 $P = \frac{1}{2}(S+I)$ 及 $P\widetilde{P} = \widetilde{P}$ 推出

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}(I+S)(I+S+T)\\ =\ & P\widetilde{P}\\ =\ & \widetilde{P}\\ =\ & \frac{1}{2}(I+S+T).\end{aligned}$$

另一方面

$$\frac{1}{4}(I+S)(I+S+T) = \frac{1}{2}(S+I) + \frac{1}{4}(T+ST),$$

从而

$$ST = T.$$

同理，从条件 $\widetilde{P}P = P$ 可推出 $-TS = T$. 反之，如果

$$\widetilde{P} = \frac{1}{2}(I+S+T),$$

其中 T 满足式 (1.1.1).$\widetilde{P}$ 为 X 中连续线性算子，且由 $P^2 = P$, 得

$$\begin{aligned}P\widetilde{P} &= \frac{1}{4}(S+I)(S+I+T)\\ &= \left[\frac{1}{2}(S+I)\right]^2 + \frac{1}{4}(ST+T)\\ &= \frac{1}{2}(S+I) + \frac{1}{2}T\\ &= \widetilde{P}.\end{aligned}$$

同理 $\widetilde{P}P = P$, 从而

$$\widetilde{P}^2 = \widetilde{P}P\widetilde{P} = P\widetilde{P} = \widetilde{P}.$$

即 $\widetilde{P}$ 为幂等算子. 从而 $\widetilde{P}$ 为 X 中连续线性投影算子.　□

下面定义两个常数.

定义 1.1.5　设 M 为 Banach 空间 X 中的闭子空间. 定义

$$P(M) = \inf\{\|P\| \mid P\text{是}X\text{到}M\text{上的连续线性投影}\},$$

$$S(M) = \inf\{\|S\| \mid S\text{是以}M\text{为不变子空间的对合算子}\}.$$

如果 X 到 M 上不存在任何连续线性投影，规定 $P(M) = \infty$；如果不存在以 M 为不变子空间的对合算子，则规定 $S(M) = \infty$.

由定理 1.1.5, 可知

$$\frac{1}{2}(S(M) - 1) \leqslant P(M) \leqslant \frac{1}{2}(S(M) + 1). \tag{1.1.2}$$

引理 1.1.1 设 m 为一正整数，令 $n = 2^m$. 设 $1 < p < \infty$ 且 $p \neq 2$, 则 n 维空间 $l_p^{(n)}$ 中有一个闭线性子空间 $M^{(n)}$ 满足

$$S(M^{(n)}) \geqslant n^{|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}|}$$

且

$$P(M^{(n)}) \geqslant \frac{1}{2}[n^{|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}|} - 1].$$

证明 仅就 $1 < p < 2$ 的情况证明，其它情形可由转置得到. 设

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

如果 S_{m-1} 已经给出，令

$$S_m = \begin{pmatrix} S_{m-1} & S_{m-1} \\ S_{m-1} & -S_{m-1} \end{pmatrix}.$$

再令 $S = \dfrac{1}{\sqrt{n}} S_m$, 则 S 为 $n \times n$ 阶对称矩阵. 易证 S 是空间 $l_p^{(n)}$ 的对合映射. 设 $M^{(n)}$ 是对合映射 S 的不变子空间. 由定理 1.1.5(ii) 可知：每一个以 $M^{(n)}$ 为不变子空间的对合映射具有 $S + T$ 的形式，其中 T 为 $n \times n$ 阶对称矩阵，且满足 (1.1.1).

由于矩阵 TS 的迹 $\mathrm{tr}(TS)$ 与矩阵 TS 的转置矩阵 ST 的迹 $\mathrm{tr}(ST)$ 相同. 又由 (1.1.1) 式可得

$$\mathrm{tr} T = \mathrm{tr}(ST) = -\mathrm{tr}(TS) = -\mathrm{tr}(ST).$$

由此得到 $\mathrm{tr} T = \mathrm{tr}(ST) = 0$. 若设

$$S = (s_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}, \quad T = (t_{ij})_{i,j=1,\cdots,n},$$

则有 $\sum\limits_{i=1}^{n} t_{ii} = 0$. 由此可知，至少有一个 $t_{jj} \geqslant 0$. 由 S 的对称性及 $S^2 = I$, 对一切 $k (1 \leqslant k \leqslant n)$, 必有

$$\sum_{i=1}^{n} s_{ik}^2 = 1.$$

再由 $T_n = ST$ 及 S 的对称性，有

$$\sum_{i=1}^{n} s_{ij}t_{ij} = \sum_{i=1}^{n} s_{ji}t_{ij} = t_{jj},$$

$$\sum_{i=1}^{n} s_{ij}s_{ij} = \sum_{i=1}^{n} s_{ij}^2 = 1.$$

由此推出

$$1 \leqslant 1 + t_{jj} = \sum_{i=1}^{n} s_{ij}(s_{ij} + t_{ij}). \tag{1.1.3}$$

根据 S 的构造，每个 s_{ij} 是 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 或 $\dfrac{-1}{\sqrt{n}}$. 如果令 $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p}$, 则得到

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} |s_{ij}|^q\right)^{\frac{1}{q}} &= (n \cdot n^{-\frac{q}{2}})^{\frac{1}{q}} \\ &= n^{\frac{(1-\frac{q}{2})}{q}} \\ &= n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \\ &= n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

对于 (1.1.3) 式，应用 Hölder 不等式，得

$$\begin{aligned}1 &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |s_{ij}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} |s_{ij} + t_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|(S+T)e_j\|_{l_p},\end{aligned}$$

此处 $\{e_j\}_{j=1}^n$ 为空间 $l_p(1 < p < \infty)$ 的单位向量基. 所以对每一个 T, 有

$$\|S + T\| \geqslant n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

因此 $S(M^{(n)}) \geqslant n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$, 从而由 (1.1.2) 有

$$P(M^{(n)}) \geqslant \frac{1}{2}(n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} - 1).$$ □

此引理为我们构造了 l_p 的闭子空间 $M^{(n)}$, 它可以有任意大的投影常数 $P(M^{(n)})$. 运用这一事实，便可构造 l_p 的拓扑不可补的闭子空间.

为此，首先介绍 Banach 空间序列的 $p-$ 和概念.

设 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Banach 空间序列，设 $1 < p < \infty$, 令

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid x_n \in E_n,\ n \in N\},$$

又定义 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的 $p-$ 和为

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right)_p = \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \sum_{n=1}^{\infty} E_n \;\middle|\; \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{E_n}^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\},$$

则 $\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}E_n\right)_p, \|\cdot\|_p\right)$ 为 Banach 空间.

定理 1.1.6 对于 $m\in N, M^{(2^m)}$ 的定义由引理 1.1.1 确定. 设 $M=\left(\sum_{m=1}^{\infty}M^{(2^m)}\right)_p$ $(1<p<\infty$ 且 $p\neq 2)$, 则 M 是 Banach 空间 l_p 内拓扑不可补的闭子空间.

证明 令 $F=\left(\sum_{m=1}^{\infty}l_p^{(2^m)}\right)_p$, 则 M 是 F 的闭线性子空间.

首先证 F 与 l_p 等距同构.

设 $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}\in F, x_m=(x_m(1),x_m(2),\cdots,x_m(2^m))\in l_p^{(2^m)}, m=1,2,\cdots$. 取 $y=(x_1(1),x_1(2),x_2(1),x_2(2),x_2(3),x_2(4),\cdots,x_m(1),x_m(2),\cdots,x_m(2^m),\cdots)\in l^p$, 则

$$\|x\|_F=\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^m}|x_m(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|y\|_p,$$

因此 F 与 l_p 等距同构.

其次证: M 在 F 中是拓扑不可补的.

设 Q_m 是 F 到 $l_p^{(2^m)}$ 上的线性投影, $m=1,2,\cdots$. 即对任意 $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}\in F$, 有

$$\begin{aligned}Q_m x&=(0,0,\cdots,0,x_m,0,\cdots)\\&=(0,0,\cdots,0,x_m(1),x_m(2),\cdots,x_m(2^m),0,\cdots),\ m=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

则显然 $Q_m(M)=M^{(2^m)}$. 假设 P 是 F 到 M 上的线性投影, 则 $Q_m\cdot P$ 是 F 到 $M^{(2^m)}$ 上的线性投影.

用 R_m 表示由 $l_p^{(2^m)}$ 到 F 中的典则内射, 即对任意的 $x_m\in l_p^{(2^m)}$, $R_m x_m=(0,0,\cdots,0,x_m,0,\cdots)$ $(m=1,2,\cdots)$. 注意到 $\|Q_m\|=1,(m=1,2,\cdots)$, 我们有

$$\|Q_m\cdot P\cdot R_m\|\leqslant\|Q_m\cdot P\|\leqslant\|P\|.$$

而且 $Q_m\cdot P\cdot R_m$ 是 $l_p^{(2^m)}$ 到 $M^{(2^m)}$ 上的线性投影. 应用引理 1.1.1, 对一切自然数 m, 有

$$\|Q_m\cdot P\cdot R_m\|\geqslant\frac{1}{2}(2^{m|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}|}-1),$$

从而

$$\|P\|\geqslant\frac{1}{2}(2^{m|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}|}-1),$$

因此, 线性投影算子 P 是无界的. 于是 M 在 F 中不是拓扑可补的. 又因 F 与 l_p 等距同构, 故 M 在 l_p 中不是拓扑可补的. □

进一步我们有

定理 1.1.7 (J.Lindenstrauss 和 L. Tzafriri) 如果 Banach 空间 X 中的每一个闭子空间都是拓扑可补的, 则 X 拓扑同构于一个 Hilbert 空间.

证明 (见 [LT] 或专著 [Yu2]). □

§1.2　度量投影算子

Banach 空间的对偶映射，是利用 Banach 空间几何结构研究度量投影算子的有力工具. 为此，首先介绍赋范线性空间的对偶映射.

1. 赋范线性空间的对偶映射

以后，如无特别声明，均假设 X 为实赋范线性空间， X^* 为 X 的共轭空间. 对于每个 $x \in X$, 由 Hahn-Banach 定理，存在 $x^* \in X^*$ 满足 $\langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2$, 这里 $\langle x, x^* \rangle$ 表示泛函 x^* 在元素 x 上的值 $x^*(x)$. 于是可以引入如下的定义：

定义 1.2.1　集值映射 $F_X : X \rightrightarrows X^*$ 定义为

$$F_X(x) = \{x^* | x^* \in X^*,\ \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\},\ x \in X,$$

称为空间 X 的对偶映射.

为了研究对偶映射 F_X 的特征，需要从另一个方面讨论范数 $\|\cdot\|$ 的可微性.

设 $x_0 \in X$, $y \in X$, $t > 0$, 令

$$\Delta(x_0, y, t) = \frac{\|x_0 + ty\| - \|x_0\|}{t}$$

为范数 $\|\cdot\|$ 在 x_0 处沿 y 的差商.

因为数值函数 $t \longmapsto \|x_0 + ty\|$ 为凸的，故当 $t > 0$ 时， $t \longmapsto \Delta(x_0, y, t)$ 为单调增的. 即当 $t \downarrow 0$, 时，为单调减的. 注意到，对一切 $t > 0$, $\Delta(x_0, y, t) \geqslant -\|y\|$, 从而右导数

$$\Delta'_+(x_0, y) = \lim_{t \to 0^+} \Delta(x_0, y, t)$$

存在. 因为

$$\Delta(x_0, y, -t) = -\Delta(x_0, -y, t),$$

故得知对 $t < 0$, $\Delta(x_0, y, t)$ 为单调增的，且上方有界，因而左导数

$$\Delta'_-(x_0, y) = \lim_{t \to 0^-} \Delta(x_0, y, t)$$

存在，且

$$\Delta'_-(x_0, y) = -\Delta'_+(x_0, -y).$$

于是有不等式

$$\begin{aligned} \Delta(x_0, y, -t) &\leqslant \Delta'_-(x_0, y) \leqslant \Delta'_+(x_0, y) \\ &\leqslant \Delta(x_0, y, t), \qquad t > 0. \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

如果

$$\Delta'_-(x_0, y) = \Delta'_+(x_0, y),$$

则公共值记为 $\Delta'(x_0, y)$, 称为 $\|\cdot\|$ 在 x_0 处沿方向 y 的 Gâteaux 导数.

定理 1.2.1　设 $F_X : X \rightrightarrows X^*$ 为 X 的对偶映射， $x_0 \in X$, 则

$$F_X(x_0)=\{x^*\in X^*\mid \Delta'_-(x_0,y)\|x_0\|\leqslant\langle y,x^*\rangle\\ \leqslant\Delta'_+(x_0,y)\|x_0\|,\ \forall y\in X\}. \tag{1.2.2}$$

证明 设 $x^*\in X^*$, 满足

$$\Delta'_-(x_0,y)\|x_0\|\leqslant\langle y,x^*\rangle\leqslant\Delta'_+(x_0,y)\|x_0\|,\quad \forall y\in X. \tag{1.2.3}$$

因为对 $t>0$, $\Delta(x_0,y,-t)>-\|y\|$ 且 $\Delta(x_0,y,t)\leqslant\|y\|$. 从而 $\Delta'_-(x_0,y)\geqslant-\|y\|$ 且 $\Delta'_+(x_0,y)\leqslant\|y\|$. 再由 (1.2.3) 式，得

$$-\|y\|\|x_0\|\leqslant\langle y,x^*\rangle\leqslant\|y\|\|x_0\|,$$

于是

$$|\langle y,x^*\rangle|\leqslant\|x_0\|\|y\|,\quad \forall y\in X. \tag{1.2.4}$$

在 (1.2.1) 式中取 $y=x_0$, 由 (1.2.2) 、 (1.2.4) 有

$$\langle x_0,x^*\rangle=\|x_0\|^2=\|x^*\|^2,$$

于是 $x^*\in F_X(x_0)$.

反之，设 $x^*\in F_X(x_0)$, 由 F_X 的定义，有

$$\begin{aligned}\|x_0\|^2+t\langle y,x^*\rangle=&\langle x_0+ty,x^*\rangle\\ \leqslant&\|x^*\|\|x_0+ty\|\\ =&\|x_0\|\|x_0+ty\|,\quad t>0.\end{aligned}$$

由此即得

$$\langle y,x^*\rangle\leqslant\frac{\|x_0+ty\|-\|x_0\|}{t}\cdot\|x_0\|,\quad \forall t>0,\ y\in X.$$

同理可得

$$\langle y,x^*\rangle\geqslant\frac{\|x_0\|-\|x_0-ty\|}{t}\cdot\|x_0\|,\quad \forall t>0,\ y\in X.$$

令 $t\to0^+$, 得到 $\forall y\in X$

$$\Delta'_-(x_0,y)\|x_0\|\leqslant\langle y,x^*\rangle\leqslant\Delta'_+(x_0,y)\|x_0\|.$$

□

定理 1.2.2 X 的对偶映射 $F_X{:}X\rightrightarrows X^*$ 为齐次集值映射，即 $F_X(\lambda x_0)=\lambda F_X(x_0)$, $\forall x_0\in X$, $\lambda\in R^1$.

证明 不妨设 $\lambda\neq0$, 由于对 $\forall x_0\in X$, 有

$$F_X(x_0)=\{x^*\mid(x_0,x^*)\in X\times X^*\ \text{且}\ \langle x_0,x^*\rangle=\|x_0\|^2=\|x^*\|^2\},$$

从而

$$\begin{aligned}&F_X(\lambda x_0)\\ =&\{x^*\mid(\lambda x_0,x^*)\in X\times X^*\ \ \text{且}\langle\lambda x_0,x^*\rangle=\|\lambda x_0\|^2=\|x^*\|^2\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big\{\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}x^* \mid \lambda\Big(x_0, \frac{1}{\lambda}x^*\Big) \in X \times X^* \text{ 且 } \\
&\quad \Big\langle x_0, \frac{1}{\lambda}x^* \Big\rangle = \frac{1}{\lambda^2}\langle \lambda x_0, x^*\rangle = \|x_0\|^2 = \Big\|\frac{1}{\lambda}x^*\Big\|^2\Big\} \\
&= \{\lambda y^* \mid (x_0, y^*) \in X \times X^* \text{ 且 } \langle x_0, y^*\rangle = \|x_0\|^2 = \|y^*\|^2\} \\
&= \lambda F_X(x_0).
\end{aligned}
$$

□

定理 1.2.3　设 X 为 Banach 空间，X 的对偶映射 $F_X : X \rightrightarrows X^*$ 为满射 (即 $\forall x^* \in X^*$, $\exists x \in X$, 使得 $x^* \in F_X(x)$.) 当且仅当 X 为自反的.

证明　充分性. 设 X 为自反 Banach 空间，$\forall x^* \in X^*$, 由 James 定理 (见 [Yu1]), 存在 $x_0 \in X$, $\|x_0\| = 1$, 满足 $\langle x_0, x^*\rangle = \|x^*\|$. 令 $x = \|x^*\|x_0 \in X$, 则 $\langle x, x^*\rangle = \|x^*\|\langle x_0, x^*\rangle = \|x^*\|^2 = \|x\|^2$, 从而 $x^* \in F_X(x)$.

必要性. 若 F_X 为满射，$\forall x^* \in X^*\backslash\{\theta\}$, 存在 $x \in X$, 满足 $x^* \in F_X(x)$. 由此可知 $\|x\| = \|x^*\| \neq 0$. 设 $x_0 = \dfrac{1}{\|x\|}x$, 则 $\|x_0\| = 1$, 且

$$\langle x_0, x^*\rangle = \frac{1}{\|x\|}\langle x, x^*\rangle = \frac{1}{\|x\|}\|x^*\|^2 = \|x^*\|.$$

从而由 James 定理，X 为自反 Banach 空间. □

以下记 $S(X)$ 为 X 的单位球面.

定理 1.2.4　设 F_X 为 X 的对偶映射，则 F_X 为单射 (即 $F_X(x)\bigcap F_X(y) \neq \varnothing \Longrightarrow x = y$.) 当且仅当空间 X 为严格凸的.

证明　必要性. 设 $x \in S(X)$,$y \in S(X)$, 满足

$$\|x + y\| = 2.$$

于是 $\dfrac{x+y}{2} \in S(X)$. 假如 $x \neq y$, 由 Hahn-Banach 定理，存在 $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$, 满足

$$\Big\langle \frac{x+y}{2}, x^* \Big\rangle = 1 = \|x^*\|.$$

另一方面，

$$
\begin{aligned}
\Big\langle \frac{x+y}{2}, x^* \Big\rangle &= \Big\langle \frac{x}{2}, x^* \Big\rangle + \Big\langle \frac{y}{2}, x^* \Big\rangle \\
&= \frac{\langle x, x^*\rangle}{2} + \frac{\langle y, x^*\rangle}{2} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

注意到 $\langle x, x^*\rangle \leqslant 1$, 且 $\langle y, x^*\rangle \leqslant 1$, 从而

$$\langle x, x^*\rangle = 1 = \|x\|^2 = \|x^*\|^2,$$

$$\langle y, x^*\rangle = 1 = \|y\|^2 = \|x^*\|^2.$$

于是由 F_X 的定义，知 $x^* \in F_X(x)\bigcap F_X(y)$, 此与 F_X 的单射性矛盾. 因此 $x=y$, 即 X 为严格凸空间.

充分性. 设 $x\in X$, $y\in X$, 满足

$$F_X(x)\cap F_X(y)\neq\varnothing.$$

不失一般性. 设 $\|x\|=\|y\|\neq 0$, 再由 F_X 的齐性，又可设 $\|x\|=\|y\|=1$.

任取 $x^*\in F_X(x)\bigcap F_X(y)$, 则

$$2\geqslant\|x+y\|\geqslant\langle x+y,x^*\rangle=\langle x,x^*\rangle+\langle y,x^*\rangle=2.$$

从而 $\|x+y\|=2$. 由于空间 X 为严格凸的. 于是 $x=y$, 即 F_X 为单射. □

定理 1.2.5 设 F_X 为 X 的对偶映射，则 F_X 为单值的当且仅当空间 X 为光滑的.

证明 必要性. $\forall x\in S(X)$, 因为 F_X 为单值的, 故有唯一的 $x^*=F_X(x)\in X^*$ 满足

$$\langle x,x^*\rangle=\|x\|^2=\|x^*\|^2=1.$$

由光滑性的定义，知 X 为光滑的.

充分性. 设 $x\in X$, 不妨设 $x\neq\theta$, 则 $y=\dfrac{1}{\|x\|}x\in S(X)$. 假若有 x_1^* 、$x_2^*\in F_X(x)$ 且 $x_1^*\neq x_2^*$, 则

$$y_1^*=\frac{1}{\|x\|}x_1^*\neq\frac{1}{\|x\|}x_2^*=y_2^*,$$

于是

$$\langle y,y_1^*\rangle=\left\langle\frac{x}{\|x\|},\frac{x_1^*}{\|x\|}\right\rangle=\frac{1}{\|x\|^2}\langle x,x_1^*\rangle=1,$$

$$\langle y,y_2^*\rangle=\left\langle\frac{x}{\|x\|},\frac{x_2^*}{\|x\|}\right\rangle=\frac{1}{\|x\|^2}\langle x,x_2^*\rangle=1.$$

这与 X 的光滑性矛盾. 因此， $F_X(x)$ 为单点集. □

定理 1.2.6 Banach 空间 X 为 Hilbert 空间当且仅当 F_X 为加法的.

证明 必要性. 显然.

充分性. 设 X 的对偶映射 F_X 为加法的. 再由定理 1.2.2, 知 F_X 为线性的. $\forall x,y\in X$, $x^*\in F_X(x)$, $y^*\in F_Y(y)$, 有 $x^*\pm y^*\in F_X(x\pm y)$, 于是由 F_X 的定义,

$$\|x\pm y\|^2=\langle x\pm y,x^*\pm y^*\rangle=\|x\|^2\pm\langle y,x^*\rangle\pm\langle x,y^*\rangle+\|y\|^2.$$

由此得到

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2). \tag{1.2.5}$$

因此， X 的范数满足平行四边形法则，故 X 为内积空间. 再由 X 的完备性，知 X 为 Hilbert 空间. □

2. Banach 空间的 (集值) 度量投影

本节对 Banach 空间中的几种常见的集合上的度量投影进行介绍.

定义 1.2.2 设 X 为 Banach 空间, $M \subset X$ 为 X 的子集. 集值映射 $\mathcal{P}_M : X \rightrightarrows M$ 定义为

$$\mathcal{P}_M(x) = \{u \in M \mid \|x-u\| = \inf_{v \in M} \|x-v\|\ \},\ x \in X,$$

称为从 X 到 M 上的 (集值) 度量投影.

若对任意 $x \in X, \mathcal{P}_M(x) \neq \varnothing$, 则称 M 为 X 的追近集; 若对任意 $x \in X, \mathcal{P}_M(x)$ 至多为单点集, 则称 M 为 X 的半 Chebyshev(切比雪夫) 集. 追近的半 Chebyshev 集, 称为 Chebyshev 集.

当子集 M 为 (闭) 凸集, (闭) 子空间时, 分别记为 C 与 L.

定理 1.2.7 度量投影 $\mathcal{P}_C(\cdot)$ 与 X 的空间结构具有如下关系:

(1) $\forall X$ 中闭凸集 $C, \forall x \in X, \mathcal{P}_C(x) \neq \varnothing$ 当且仅当 X 为自反 Banach 空间;

(2) $\forall X$ 中闭凸集 $C, \forall x \in X, \mathcal{P}_C(x)$ 至多为单点集当且仅当 X 为严格凸 Banach 空间.

证明 (1) 充分性. 设 X 自反, $\forall X$ 中闭凸集 $C, \forall x \in X$, 不妨设 $x \overline{\in} C$, 则

$$d = \inf\{\|x-y\|;\ y \in C\} > 0.$$

从而存在极小化序列 $\{z_n\} \subset C$, 满足

$$\|x - z_n\| \longrightarrow d \ \ (n \to \infty).$$

显然 $\{z_n\}$ 为有界集. 因为 X 为自反的, 故 $\{z_n\}$ 有子列, 不妨仍记为 $\{z_n\}$, 使得

$$z_n \xrightarrow{\text{弱}} x_0 \ \ (n \to \infty).$$

由于 C 为闭凸集, 由 Mazur 定理 C 为弱闭的, 于是 $x_0 \in C$. 下面证明:

$$\|x - x_0\| = d.$$

如若不然, 存在 $\alpha > 0$, 使得

$$\|x - x_0\| = d + \alpha,$$

取 N 充分大, 使当 $n \geqslant N$ 时,

$$\|x - z_n\| \leqslant d + \frac{\alpha}{2}.$$

显然, $x_0 \overline{\in} O\left(x, d+\frac{\alpha}{2}\right) = \left\{y \in X \mid \|x-y\| \leqslant d + \frac{\alpha}{2}\right\}$. 由凸集分离定理, 存在 $x^* \in X^*$, 满足

$$\sup_{\|x-y\| \leqslant d+\frac{\alpha}{2}} \{\langle y, x^* \rangle\} < \langle x_0, x^* \rangle.$$

因为 $\|z_n - x\| \leqslant d + \frac{\alpha}{2} \quad (n \geqslant N)$, 所以

$$\langle z_n, x^* \rangle \not\to \langle x_0, x^* \rangle \quad (n \to \infty).$$

这与 $z_n \xrightarrow{弱} x_0 \quad (n \to \infty)$ 矛盾. 于是

$$x_0 \in \mathcal{P}_C(x).$$

必要性. 为证 X 自反, 由 James 定理, 只需证: $\forall x^* \in X^*, \|x^*\| = 1$, 存在 $x_0 \in S(X)$, 使得

$$\langle x_0, x^* \rangle = 1.$$

令

$$U_1 = \{x \in X \mid \|x\| \leqslant 1\}, \ H_1 = \{x \in X \mid \langle x, x^* \rangle = 1\}, \ C = U_1 \cap H_1,$$

则 C 为 X 中闭凸集.

由条件, 存在 $x_0 \in \mathcal{P}_C(\theta)$, 于是

$$1 \geqslant \|x_0\| = \inf\{\|x\| \mid x \in C\} \geqslant \inf\{\|x\| \mid x \in H_1\}. \tag{1.2.6}$$

又因为 $\forall x \in H_1$, 有

$$1 = \langle x, x^* \rangle \leqslant \|x\| \|x^*\| = \|x\|,$$

从而

$$\inf\{\|x\| \mid x \in H_1\} \geqslant 1. \tag{1.2.7}$$

由 (1.2.6) 、 (1.2.7), 有

$$\|x_0\| = 1 \ \text{且} \ \langle x_0, x^* \rangle = 1,$$

因此 X 自反.

(2) 充分性. 设 X 为严格凸的. $\forall X$ 中闭凸集 C, $\forall x \in X$, 如果有 y_1、 $y_2 \in \mathcal{P}_C(x)$, $y_1 \neq y_2$, 则 $\forall \ \alpha \in (0,1)$, 有

$$\begin{aligned}
\|x - [\alpha y_1 + (1-\alpha) y_2]\| &= \|\alpha(x - y_1) + (1-\alpha)(x - y_2)\| \\
&\leqslant \alpha \|x - y_1\| + (1-\alpha)\|x - y_2\| \\
&= \inf\{\|x - y\| \mid y \in C\} \\
&= d(x; C).
\end{aligned}$$

由于 $\alpha y_1 + (1-\alpha) y_2 \in C, \ \forall \ \alpha \in [0,1]$, 故

$$\alpha y_1 + (1-\alpha) y_2 \in \mathcal{P}_C(x).$$

这样一来, 有

$$[y_1, y_2] \subset S(x; d(x; C)),$$

其中 $[y_1,y_2]=\{y\in X\mid y=\alpha y_1+(1-\alpha)y_2,\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1\}$ 为 X 中线段. 这与 X 的严格凸性矛盾. 因此 $\mathcal{P}_C(x)$ 至多为单点集.

必要性. 设 $\forall$ 闭凸集 $C\subset X, \forall x\in X$, $\mathcal{P}_C(x)$ 至多为单点集, 特别 $\mathcal{P}_C(\theta)$ 至多为单点集. 假如 X 不严格凸, 则存在 $x_1,x_2\in S(X)$, $x_1\neq x_2$, $\|x_1+x_2\|=2$.

令 $C=\{\bar{x}\in X\mid \bar{x}=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\ \lambda\in[0,1]\}$, 则 C 为 X 中闭凸集, 且 $\forall\bar{x}\in C$, 有 $\|\bar{x}\|=1$. 于是 $\mathcal{P}_C(\theta)=C$, 这与 $\mathcal{P}_C(\theta)$ 至多为单点集矛盾. 因此, X 为严格凸的. □

引理 1.2.1 设 $C\subset X$ 为凸集, $x\in X\backslash\overline{C}$, 令

$$C_1^*=\{x^*\in X^*\mid\langle x-y,x^*\rangle\geqslant 1,\ \forall y\in C\},$$

$$C_0^*=\{x^*\in X^*\mid\langle x-y,x^*\rangle\geqslant 0,\ \forall y\in C\},$$

则

$$\begin{aligned}\inf_{y\in C}\|x-y\|&=\max_{x^*\in C_1^*}\frac{1}{\|x^*\|}\\&=\max_{\substack{x^*\in C_0^*\\\|x^*\|=1}}\inf_{y\in C}\langle x-y,x^*\rangle.\end{aligned}$$

证明 (1) 先证

$$\inf_{y\in C}\|x-y\|=\max_{x^*\in C_1^*}\frac{1}{\|x^*\|}.$$

设

$$d=\inf_{y\in C}\|x-y\|,$$

则 $d>0$, $\forall x^*\in C_1^*$, 有

$$\langle x-y,\ x^*\rangle\geqslant 1,\qquad\forall\, y\in C,$$

从而导出

$$1\leqslant\|x^*\|\|x-y\|,\qquad\forall\, y\in C,$$

于是

$$1\leqslant\|x^*\|\inf_{y\in C}\|x-y\|=\|x^*\|d.$$

再由 $x^*\in C_1^*$ 的任意性, 有

$$\sup_{x^*\in C_1^*}\frac{1}{\|x^*\|}\leqslant d.\tag{1.2.8}$$

设 $B(x;d)$ 为以 x 为中心, $d>0$ 为半径的闭球. 显然, $C\cap\overset{\circ}{B}(x;d)=\varnothing$, 对于凸集 C 及有内点的凸集 $\overset{\circ}{B}(x;d)$, 应用凸集分离定理, 存在 $x_0^*\in X^*$, 由其所确定的某一闭超平面:

$$H_0=\{x\in X\mid\langle x,\ x^*\rangle=c_0\},$$

其中 $c_0=\inf\limits_{y\in B(x;d)}\langle y,x_0^*\rangle$, 将上述两凸集分离, 而且

$$\langle z,\ x_0^*\rangle = \begin{cases} \leqslant c_0, & \forall\ z \in C, \\ \geqslant c_0, & \forall\ z \in B(x;d), \\ > c_0, & \forall\ \overset{\circ}{B}(x;d). \end{cases}$$

这样我们由 $x \in \overset{\circ}{B}(x;d)$ 及

$$\langle x-y,\ x_0^*\rangle = \langle x,\ x_0^*\rangle - c_0 > 0, \quad \forall y \in H_0,$$

可得到一个有界线性泛函

$$x_1^* = \frac{x_0^*}{\langle x,\ x_0^*\rangle - c_0},$$

使得

$$H_0 = \{y \in X \mid \langle x-y,\ x_1^*\rangle = 1\} \triangleq H_1$$

及

$$\langle x-y,\ x_1^*\rangle \geqslant 1, \qquad \forall\ y \in C,$$

$$\langle x-y,\ x_1^*\rangle \leqslant 1, \qquad \forall\ y \in O(x;d).$$

由此可知， $x_1^* \in C_1^*$.

下面证

$$\frac{1}{\|x_1^*\|} = \inf_{\substack{\langle x,\ x_1^*\rangle=1 \\ x\in X}} \|x\|. \tag{1.2.9}$$

事实上，若令 $H = \{x \in X \mid \langle x,\ x_1^*\rangle = 1\}$, 则

$$d_1 = d(\theta, H) = \inf_{x\in H} \|x\|.$$

只需证

$$d_1 = \frac{1}{\|x_1^*\|}.$$

首先， $\forall\ x \in H$, 有 $1 = \langle x,\ x_1^*\rangle \leqslant \|x\|\|x_1^*\|$, 故 $\|x\| \geqslant \dfrac{1}{\|x_1^*\|}$, 从而 $d_1 \geqslant \dfrac{1}{\|x_1^*\|}$.

其次，由范数 $\|x_1^*\|$ 的定义， $\forall\ \varepsilon > 0$, 存在 $x_0 \in S(X)$, 使

$$|\langle x_0,\ x_1^*\rangle| > \|x_1^*\| - \varepsilon.$$

令 $\overline{x}_0 = x_0/\langle x_0,\ x_1^*\rangle$, 则 $\langle \overline{x}_0,\ x_1^*\rangle = 1$, 即 $\overline{x}_0 \in H$. 且由此得

$$\begin{aligned} 1 = \|x_0\| &= \|\langle x_0,\ x_1^*\rangle \overline{x}_0\| \\ &= |\langle x_0,\ x_1^*\rangle|\|\overline{x}_0\| \\ &> (\|x_1^*\| - \varepsilon)\|\overline{x}_0\|, \end{aligned}$$

从而由 $\overline{x}_0 \in H$, 有

$$d_1 = \inf_{x\in H} \|x\| \leqslant \|\overline{x}_0\| < \frac{1}{\|x_1^*\| - \varepsilon},$$

再由 ε 的任意性，得到

$$d_1 \leqslant \frac{1}{\|x_1^*\|}.$$

综合上述， (1.2.9) 式成立.

由 (1.2.7) 及 H_1 的定义

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|x_1^*\|} &= \inf_{\substack{\langle x,\ x_1^*\rangle=1 \\ x\in X}} \|x\| \\ &= \inf_{\substack{\langle x-y,\ x_1^*\rangle=1 \\ y\in X}} \|x-y\| \\ &= \inf_{y\in H_1} \|x-y\| \\ &= d(x,\ H_1).\end{aligned}$$

$H_1 = H_0$ 为起隔离作用的闭超平面， H_1 不能包含凸集 $B(x,d)$ 的内点，而只能包含 $B(x,d)$ 的边界点或外点，由此，则有

$$\frac{1}{\|x_1^*\|} = d(x,\ H_1) \geqslant d. \tag{1.2.10}$$

由 (1.2.8) 及 (1.2.10) 可导出

$$\max_{x^*\in C_1^*} \frac{1}{\|x^*\|} = d = \inf_{y\in C} \|x-y\|.$$

(2) 最后证

$$\max_{x^*\in C_1^*} \frac{1}{\|x^*\|} = \max_{\substack{x^*\in C_0^* \\ \|x^*\|=1}} \inf_{y\in C} \langle x-y,\ x^*\rangle.$$

设

$$m(x^*) = \inf_{y\in C} \langle x-y,\ x^*\rangle, \qquad \forall\ x^* \in X^*.$$

由 C_1^* 的定义， $m(x^*) \geqslant 1,\ \forall\ x^* \in C_1^*$. 由此导出

$$\left\langle x-y,\ \frac{x^*}{m(x^*)} \right\rangle \geqslant 1, \qquad \forall\ x^* \in C_1^*,\ y \in C.$$

$$\begin{aligned}\max_{x^*\in C_1^*} \frac{1}{\|x^*\|} &= \max\left\{ \frac{1}{\|x^*\|}\ \middle|\ \langle x-y,\ x^*\rangle \geqslant 1,\ \forall y\in C,\ x^*\in X^* \right\} \\ &= \max\left\{ \frac{m(x^*)}{\|x^*\|}\ \middle|\ \frac{\langle x-y,\ x^*\rangle}{m(x^*)} \geqslant 1,\ \forall y\in C,\ x^*\in C_1^* \right\} \\ &= \max\left\{ \frac{m(x^*)}{\|x^*\|}\ \middle|\ \frac{\langle x-y,\ x^*\rangle}{\inf_{y\in C}\langle x-y,\ x^*\rangle} \geqslant 1,\ \forall y\in C,\ x^*\in C_1^* \right\} \\ &= \max\left\{ \frac{m(x^*)}{\|x^*\|}\ \middle|\ \langle x-y,\ x^*\rangle \geqslant 0,\ \forall y\in C,\ x^*\in X^* \right\}\end{aligned}$$

$$= \max\left\{\inf_{y\in C}\left\langle x-y,\ \frac{x^*}{\|x^*\|}\right\rangle \,\Big|\, \left\langle x-y,\ \frac{x^*}{\|x^*\|}\right\rangle \geqslant 0,\ \forall y\in C,\ x^*\in X^*\right\}$$

$$= \max_{\substack{x^*\in C_0^*\\ \|x^*\|=1}} \inf_{y\in C}\langle x-y,\ x^*\rangle.$$

定理 1.2.8 设 C 为 X 中凸集, $x_0\in C,\ x\in X\backslash\overline{C}$, 则下述命题等价

(1) $x_0\in\mathcal{P}_C(x)$;

(2) 存在 $x_0^*\in X^*$, 满足

$$\|x_0^*\|=1,\ \langle x-x_0,\ x_0^*\rangle=\|x-x_0\|,\quad \langle x_0-y,\ x_0^*\rangle\geqslant 0,\quad \forall y\in C;$$

(3) 存在 $x_1^*\in X^*$, 满足

$$\|x_1^*\|=1,\ \langle x-y,\ x_1^*\rangle\geqslant\|x_0-x\|,\qquad \forall y\in C;$$

(4) 存在 $x_2^*\in X^*$, 满足

$$\|x_2^*\|=\|x-x_0\|,\quad \langle x-y,\ x_2^*\rangle\geqslant\|x_0-x\|^2,\quad \forall y\in C;$$

(5) 存在 $x^*\in F_X(x-x_0)$, 满足

$$\langle x_0-y,\ x^*\rangle\geqslant 0,\qquad \forall y\in C.$$

证明 (1)$\Longrightarrow$(2)

设 $x_0\in\mathcal{P}_C(x)$. 由引理 1.2.1,

$$\inf_{y\in C}\|x-y\| = \max_{\substack{x^*\in C_0^*\\ \|x^*\|=1}} \inf_{y\in C}\langle x-y,\ x^*\rangle,$$

于是存在 $x_0^*\in X^*$,

$$\|x_0^*\|=1,\ \langle x-y,\ x_0^*\rangle\geqslant 0,\quad \forall y\in C,$$

且满足

$$\begin{aligned}\|x-x_0\| &= \inf_{y\in C}\|x-y\| = \inf_{y\in C}\langle x-y,\ x_0^*\rangle \leqslant \langle x-x_0,\ x_0^*\rangle\\ &\leqslant \|x-x_0\|\|x_0^*\| = \|x-x_0\|,\end{aligned}\tag{1.2.11}$$

因此

$$\langle x-x_0,\ x_0^*\rangle=\|x-x_0\|.\tag{1.2.12}$$

令 $x^*=x_0^*/\|x-x_0\|$, 则由 (1.2.11) 有

$$\begin{aligned}\langle x-y,\ x^*\rangle &= \frac{\langle x-y,\ x_0^*\rangle}{\|x-x_0\|}\\ &\geqslant \frac{\inf\limits_{y\in C}\langle x-y,\ x_0^*\rangle}{\|x-x_0\|}\end{aligned}$$

$$= \frac{\|x - x_0\|}{\|x - x_0\|} = 1, \qquad \forall y \in C.$$

因而再由 (1.2.12), 有

$$\begin{aligned}\langle x_0 - y,\ x^*\rangle &= \langle x - y,\ x^*\rangle - \langle x - x_0,\ x^*\rangle \\ &\geqslant 1 - \frac{\langle x - x_0,\ x_0^*\rangle}{\|x - x_0\|} \\ &= 0, \qquad\qquad \forall y \in C.\end{aligned}$$

于是

$$\langle x_0 - y,\ x_0^*\rangle \geqslant 0, \qquad \forall\ y \in C. \tag{1.2.13}$$

(2)$\Longrightarrow$(3). 设 $x_0^* \in X^*$, 满足

$$\|x_0^*\| = 1,\ \langle x - x_0,\ x_0^*\rangle = \|x - x_0\|, \quad \langle x_0 - y,\ x_0^*\rangle \geqslant 0, \quad \forall y \in C.$$

取 $x_1^* = x_0^*$, 则 $\|x_1^*\| = 1$ 且

$$\begin{aligned}\langle x - y,\ x_1^*\rangle &= \langle x - x_0,\ x_0^*\rangle + \langle x_0 - y,\ x_0^*\rangle \\ &\geqslant \|x - x_0\| + 0 \\ &= \|x - x_0\|, \qquad\qquad \forall y \in C.\end{aligned}$$

(3)$\Longrightarrow$(4). 设存在 $x_1^* \in X^*$, 满足

$$\|x_1^*\| = 1,\ \langle x - y,\ x_1^*\rangle \geqslant \|x - x_0\|, \qquad \forall y \in C.$$

令 $x_2^* = \|x - x_0\| x_1^*$, 则

$$\|x_2^*\| = \|x - x_0\|,$$

且

$$\begin{aligned}\langle x - y,\ x_2^*\rangle &= \|x - x_0\|\langle x - y,\ x_1^*\rangle \\ &\geqslant \|x - x_0\|^2, \qquad\qquad \forall y \in C.\end{aligned}$$

(4)$\Longrightarrow$(5). 设存在 $x_2^* \in X^*$, 满足

$$\|x_2^*\| = \|x - x_0\|, \quad \langle x - y,\ x_2^*\rangle \geqslant \|x - x_0\|^2, \quad \forall y \in C.$$

令 $x^* = x_2^*$, 在上式中取 $y = x_0$, 得到 $\|x^*\| = \|x - x_0\|$, 而且

$$\begin{aligned}\|x - x_0\|^2 &\leqslant \langle x - x_0,\ x^*\rangle \\ &\leqslant \|x - x_0\|\|x^*\| \\ &\leqslant \|x - x_0\|^2,\end{aligned}$$

于是

$$\langle x-x_0,\ x^*\rangle=\|x-x_0\|^2=\|x^*\|^2,$$

即 $x^*\in F_X(x-x_0)$.

$$\begin{aligned}\langle x_0-y,\ x^*\rangle&=\langle x_0-x,\ x^*\rangle+\langle x-y,\ x^*\rangle\\&\geqslant-\|x-x_0\|^2+\|x-x_0\|^2\\&=0,\quad \forall y\in C.\end{aligned}$$

(5)$\Longrightarrow$(1). 设存在 $x^*\in F_X(x-x_0)$, 满足

$$\langle x_0-y,\ x^*\rangle\geqslant 0,\qquad \forall\ y\in C.$$

从而

$$\begin{aligned}\|x-x_0\|^2&=\langle x-x_0,\ x^*\rangle\\&=\langle x-y,\ x^*\rangle+\langle y-x_0,\ x^*\rangle\\&=\langle x-y,\ x^*\rangle-\langle x_0-y,\ x^*\rangle\\&\leqslant\langle x-y,\ x^*\rangle\\&\leqslant\|x-y\|\|x^*\|\\&=\|x-y\|\|x-x_0\|,\end{aligned}$$

于是

$$\|x-x_0\|\leqslant\|x-y\|,\qquad \forall\ y\in C,$$

即 $x_0\in\mathcal{P}_C(x)$. □

定理 1.2.9 设 C 为 X 中凸锥， L 为 X 中子空间，则

(1) $x\in X\backslash\overline{C}$, $x_0\in C$, 若 $x_0\in\mathcal{P}_C(x)$, 则 $F_X(x-x_0)\cap C^0\neq\varnothing$, 其中

$$C^0=\{x^*\in X^*\mid\langle x,\ x^*\rangle\leqslant 0,\quad \forall x\in C\}.$$

(2) $x\in X\backslash\overline{L}$, $x_0\in L$, 则 $x_0\in\mathcal{P}_L(x)$ 当且仅当 $F_X(x-x_0)\cap L^{\perp}\neq\varnothing$, 其中

$$L^{\perp}=\{x^*\in X^*\mid\langle x,\ x^*\rangle=0,\quad \forall x\in L\}.$$

证明 (1) 因为 $x_0\in\mathcal{P}_C(x)$, 由定理 1.2.8, 存在 $x^*\in F_X(x-x_0)$ 满足

$$\langle x_0-y,\ x^*\rangle\geqslant 0,\qquad \forall\ y\in C.\tag{1.2.14}$$

由于 $x_0\in C$, 且 C 为锥，从而 $2x_0\in C$, 在 (1.2.14) 式中，取 $y=2x_0$ 时，得到

$$\langle x_0,\ x^*\rangle\leqslant 0.$$

再由 (1.2.14) 式，有

$$\langle y,\ x^*\rangle \leqslant \langle x_0,\ x^*\rangle \leqslant 0, \qquad \forall\, y \in C.$$

因此 $x^* \in C^0$, 从而

$$F_X(x-x_0) \cap C^0 \neq \varnothing.$$

(2) 必要性. 设 $x_0 \in \mathcal{P}_L(x)$, 由 (1) 及 $L^\perp = L^0$, 有 $F_X(x-x_0) \cap L^\perp \neq \varnothing$.

充分性. 取 $x^* \in F_X(x-x_0) \cap L^\perp$, 则由 $x_0 \in L$ 及 L 的线性, 有 $x_0 - y \in L$, 从而

$$\langle x_0 - y,\ x^*\rangle = 0, \qquad \forall\, y \in L.$$

由定理 1.2.8 中 (5), 知 $x_0 \in \mathcal{P}_L(x)$.

推论 1.2.10 设 C 为 X 中闭凸锥, 若 C 为 X 中迫近集, 则 $\forall\, x \in X$, 存在 $x_0 \in \mathcal{P}_C(x)$, $x_1 \in F_X^{-1}(C^0)$ 满足

$$x = x_0 + x_1.$$

如果 C 为 Chebyshev 集, 则分解式唯一.

证明 $\forall x \in X$, 因 C 为迫近的, 故 $\mathcal{P}_C(x) \neq \varnothing$. 取 $x_0 \in \mathcal{P}_C(x)$, 由定理 1.2.9 中 (1), 有

$$x^* \in F_X(x-x_0) \cap C^0 \neq \varnothing.$$

令 $x_1 = x - x_0$, 则

$$x_1 \in F_X^{-1}(x^*) \subset F_X^{-1}(C^0),$$

而且

$$x = x_0 + x_1.$$

若 C 为 Chebyshev 的, 则 $\mathcal{P}_C(x)$ 为单点集, 从而分解式唯一.

推论 1.2.11(广义正交分解定理) 设 L 为 X 的闭子空间. 若 L 为 X 中迫近集, 则 $\forall x \in X$, 有分解式

$$x = x_0 + x_1,$$

这里 $x_0 \in \mathcal{P}_L(x)$, $x_1 \in F_X^{-1}(L^\perp)$. 若 L 为 Chebyshev 集, 则分解式唯一且 $x = \pi_L x + x_1$, $x_1 \in F_X^{-1}(L^\perp)$. 其中 $\mathcal{P}_L(x) = \{\pi_L x\}$.

证明 由推论 1.2.10 及 $L^\perp = L^0$, 立得. □

3. Banach 空间中度量投影算子

定义 1.2.3 设 X 为赋范线性空间, $M \subset X$ 为 X 的子集, 单值算子 $\pi_M : D(\pi_M) \to M$, 满足

$$\pi_M(x) \in \mathcal{P}_M(x), \quad x \in D(\pi_M).$$

则称 π_M 为 $\mathcal{P}_M(x)$ 的单值选择, 这里 $D(\pi_M) = \{x \in X\ :\ \mathcal{P}_M(x) \neq \varnothing\}$.

特别, 如果 M 为 X 中 Chebyshev 集时, $D(\pi_M) = X, \mathcal{P}_M(x) = \{\pi_M(x)\}, \pi_M$ 称为 X 到 M 上度量投影算子. $\pi_M(x)$ 有时亦记为 $\pi(M : x)$.

定理 1.2.12　设 X 为赋范线性空间，C 为 X 中凸集，L 为 X 中半 Chebyshev 子空间，则

(1) $C \subset D(\pi_C)$ 且 $\pi_C(x) = x$, $x \in C$. 如果 $x \in D(\pi_C)$, 则 $\pi_C(x) \in D(\pi_C)$, 且

$$\pi_C^2(x) = \pi_C(x), \quad x \in D(\pi_C), \tag{1.2.15}$$

即映射 π_C 为幂等的.

(2) 我们有

$$\big|\|x - \pi_C(x)\| - \|y - \pi_C(y)\|\big| \leqslant \|x - y\|, \quad x, y \in D(\pi_C).$$

如若 $\theta \in C$, 则有

$$\|x - \pi_C(x)\| \leqslant \|x\|, \quad x \in D(\pi_C).$$

$$\|\pi_C(x)\| \leqslant 2\|x\|, \quad x \in D(\pi_C). \tag{1.2.16}$$

(3) 若 $\theta \in C$, 则 π_C 在 C 中每点 x 处连续.

(4) 如果 $x \in D(\pi_L)$ 且 $y \in L$, 则 $x + y \in D(\pi_L)$, 且有

$$\pi_L(x + y) = \pi_L(x) + \pi_L(y) = \pi_L(x) + y, \tag{1.2.17}$$

即 π_L 为拟可加的.

(5) 如果 $x \in D(\pi_L)$ 且 $\lambda \in R$, 则

$$\lambda x \in D(\pi_L), \quad \pi_L(\lambda x) = \lambda \pi_L(x), \tag{1.2.18}$$

即 π_L 为齐性的.

(6) 如果 C 为半 Chebyshev 凸集，$x_n \in D(\pi_C), \lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} \pi_C(x_n) = y$, 则 $x \in D(\pi_L)$ 且 $\pi_C(x) = y$. 即 π_C 为闭的.

证明　(1) 的证明是显然的.

(2) 对于任意 $x, y \in D(\pi_C)$, 有

$$\begin{aligned}\|x - \pi_C(x)\| &\leqslant \|x - \pi_C(y)\| \\ &\leqslant \|x - y\| + \|y - \pi_C(y)\|.\end{aligned}$$

由 x 与 y 的对称性，得

$$\big|\|x - \pi_C(x)\| - \|y - \pi_C(y)\|\big| \leqslant \|x - y\|.$$

从而，由 $\theta \in C$, 对 $x \in D(\pi_C)$, 有

$$\begin{aligned}\|x - \pi_C(x)\| &= \big|\|x - \pi_C(x)\| - \|\theta - \pi_C(\theta)\|\big| \\ &\leqslant \|x - \theta\| \\ &= \|x\|.\end{aligned}$$

于是

$$\|\pi_C(x)\| \leqslant \|\pi_C(x) - x\| + \|x\| \leqslant 2\|x\|.$$

(3) 设 $x_n \in D(\pi_C), x_0 \in C, x_n \to x_0 (n \to \infty)$. 因为 $\theta \in C$, 则由 (2), 有

$$\begin{aligned}
&\|\pi_C(x_n) - x_0\| \\
\leqslant\ & \|\pi_C(x_n) - x_n\| + \|x_n - x_0\| \\
=\ & |\|\pi_C(x_n) - x_n\| - \|\pi_C(x_0) - x_0\|| + \|x_n - x_0\| \\
=\ & 2\|x_n - x_0\|, \quad n = 1, 2, \cdots.
\end{aligned}$$

可知 $\pi_C(x_n) \to x_0 = \pi_C(x_0)$ $(n \to \infty)$, π_C 在 x_0 处连续.

(4) 设 $x \in D(\pi_L)$, $y \in L$. 因为 L 为半 Chebyshev 子空间，所以唯一存在 $\pi_L(x) \in L$. 由于 L 为子空间，故 $\pi_L(x) + y \in L$, 从而

$$\begin{aligned}
&\|(x+y) - (\pi_L(x) + y)\| \\
=\ & \|x - \pi_L(x)\| \\
\leqslant\ & \|x - z\| \\
\leqslant\ & \|(x+y) - (z+y)\|, \ \forall z \in L.
\end{aligned}$$

于是

$$\|(x+y) - (\pi_L(x) + y)\| = \inf_{z \in L} \|(x+y) - z\|.$$

因为 L 为半 Chebyshev 子空间，从而

$$\pi_L(x+y) = \pi_L(x) + y = \pi_L(x) + \pi_L(y).$$

(5) 若 $x \in D(\pi_L), \lambda \in R$, 则有唯一 $\pi_L(x) \in L$, 从而 $\lambda\pi_L(x) \in L$, 于是

$$\begin{aligned}
&\|\lambda x - \lambda\pi_L(x)\| = |\lambda|\|x - \pi_L(x)\| \\
\leqslant & \|\lambda x - \lambda y\|, \ \forall y \in L.
\end{aligned}$$

因 L 为半 Chebyshev 子空间，故

$$\pi_L(\lambda x) = \lambda\pi_L(x).$$

(6) 因 C 为闭凸集，故由 $\{\pi_C(x_n)\} \subset C$, 知 $y = \lim_{n\to\infty} \pi_C(x_n) \in C$. 再由距离函数的连续性，有

$$\begin{aligned}
\|x - y\| &= \lim_{n\to\infty} \|x_n - \pi_C(x_n)\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(x_n, C) \\
&= \operatorname{dist}(x, C).
\end{aligned}$$

因 C 为半 Chebyshev 集，故 $\pi_C(x) = y$. □

推论 1.2.13 设 X 为赋范线性空间，L 为 X 的 Chebyshev 子空间，则度量投影算子 π_L 满足：

(1) $\pi_L^2(x) = \pi_L(x), \quad \forall x \in X$;

(2) $\pi_L(\lambda x) = \lambda \pi_L(x), \quad \forall x \in X, \lambda \in R$;

(3) $\pi_L(x+y) = \pi_L(x) + y, \quad \forall x \in X, y \in L$;

(4) $\|\pi_L(x)\| \leqslant 2\|x\|$.

定理 1.2.14 设 X 为自反严格凸 Banach 空间，且 X 满足 H 性质 (即 $\{x_n\} \subset X, x_0 \in X, \|x_n\| = \|x_0\| = 1$, 且 $x_n \xrightarrow{\text{弱}} x_0 (n \to \infty)$. 蕴含 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$), C 为 X 中闭凸集，则度量投影算子 π_C 为连续的.

证明 不失一般性，假定 $\theta \in C$. 设 $\{x_n\} \subset X, x_n \to x_0 (n \to \infty)$. 若 $\pi_C(x_n) \not\to \pi_C(x_0) \quad (n \to \infty)$，则 $\{\pi_C(x_n)\}$ 有子列，不妨使用原记号，有

$$\|\pi_C(x_n) - \pi_C(x_0)\| \geqslant d > 0, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{1.2.19}$$

由定理 1.2.12 中 (3) 知

$$\|\pi_C(x_n)\| \leqslant 2\|x_n\|, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

由于 X 为自反 Banach 空间，故有子列 $\{\pi_C(x_{n_k})\}$ 满足

$$\pi_C(x_{n_k}) \xrightarrow{\text{弱}} \bar{x} \ (k \to \infty).$$

因为 C 为闭凸集，由 Mazur 定理，C 为弱闭的，从而 $\bar{x} \in C$. 再由范数的下半连续性

$$\|\bar{x} - x_0\| \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \|\pi_C(x_n) - x_0\| \leqslant \varlimsup_{n \to \infty} \|\pi_C(x_n) - x_0\|. \tag{1.2.20}$$

应用定理 1.2.12 中 (2), 有

$$\big|\|\pi_C(x_n) - x_n\| - \|\pi_C(x_0) - x_0\|\big| \leqslant \|x_0 - x_n\|, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{1.2.21}$$

令 $n \to \infty$, 由 (1.2.20) 得

$$\|\bar{x} - x_0\| \leqslant \|\pi_C(x_0) - x_0\|.$$

再由空间 X 的严格凸性，有

$$\bar{x} = \pi_C(x_0).$$

因此，有

$$\pi_C(x_{n_k}) \xrightarrow{\text{弱}} \pi_C(x_0), \quad k \to \infty,$$

于是

$$\pi_C(x_{n_k}) - x_{n_k} \xrightarrow{\text{弱}} \pi_C(x_0) - x_0, \quad k \to \infty.$$

再由 X 的 H 性质及 (1.2.21) 式，得

$$\pi_C(x_{n_k}) - x_{n_k} \to \pi_C(x_0) - x_0, \quad n \to \infty,$$

从而由 $x_{n_k} \to x_0 (n \to \infty)$, 有

$$\pi_C(x_{n_k}) \to \pi_C(x_0), \quad k \to \infty.$$

这与 (1.2.19) 矛盾，因此 π_C 为连续的. □

注记　设 X 为 Banach 空间，C 为 X 的 Chebyshev 凸集. 如果 C 为逼近紧的，即当 $\{x_n\} \subset C, x \in X$,

$$\|x - x_n\| \to \mathrm{dist}(x, C), \quad n \to \infty,$$

$\{x_n\}$ 一定有 Cauchy 子列，则直接易证：度量投影算子 $\pi_C : X \to C$ 是连续的 (见 [Si]). 特别，当 L 为 X 的有限维 Chebyshev 子空间时，$\pi_L : X \to L$ 为连续的.

定理 1.2.15　设 X 为自反，严格凸 Banach 空间，L 为 X 的闭子空间，则下述命题等价：

(1) π_L 为线性算子；

(2) $\pi_L^{-1}(\theta)$ 为 X 的线性子空间；

(3) $\forall\, y \in L$, $\pi_L^{-1}(y)$ 为 X 中的线性流形.

证明　(1)$\Longrightarrow$(2). 显然.

(2)$\Longrightarrow$(1). 首先证

$$\pi_L^{-1}(\theta) = \{x - \pi_L(x) :\ x \in X\}. \tag{1.2.22}$$

因为

$$\pi_L(x - \pi_L(x)) = \theta,$$

所以

$$\{x - \pi_L(x) :\ x \in X\} \subset \pi_L^{-1}(\theta).$$

反之，$\forall\, x \in \pi_L^{-1}(\theta)$, 即 $\pi_L(x) = \theta$, 从而

$$x = x - \theta = x - \pi_L(x).$$

即

$$\pi_L^{-1}(\theta) \subset \{x - \pi_L(x) :\ x \in X\}.$$

因此 (1.2.22) 成立.

由于 $\pi_L^{-1}(\theta)$ 为线性的，由 (1.2.22), 知

$$\{x - \pi_L(x) :\ x \in X\}$$

为 X 的线性子空间，从而 $\forall\, x, y \in X$, 有

$$(x-\pi_L(x))+(y-\pi_L(y))=(x+y)-\pi_L(x+y),$$

两边消去 $x+y$, 得到

$$\pi_L(x+y)=\pi_L(x)+\pi_L(y),$$

即 π_L 可加的. 再由 π_L 的齐性, 知 π_L 为线性算子.

(2)$\Longrightarrow$(3). 先证 $\forall\, y\in L$,

$$\pi_L^{-1}(y)=y+\pi_L^{-1}(\theta). \tag{1.2.23}$$

$\forall\, x\in\pi_L^{-1}(y)$, 从而由 $y\in L$, 有

$$\pi_L(x-y)=\pi_L(x)-y=\theta,$$

于是 $x-y\in\pi_L^{-1}(\theta)$, 即

$$x\in y+\pi_L^{-1}(\theta).$$

反之, $\forall\, x\in y+\pi_L^{-1}(\theta)$, 则存在 $v\in\pi_L^{-1}(\theta)$, 使 $x=y+v$, 于是又由 $y\in L$ 及 π_L 的拟可加性有

$$\pi_L(x)=\pi_L(y+v)=\pi_L(y)=y.$$

即 $x\in\pi_L^{-1}(y)$, 由此及 $\pi_L^{-1}(\theta)$ 的线性得

$$\pi_L^{-1}(y)=y+\pi_L^{-1}(\theta)$$

为线性流形.

(3)$\Longrightarrow$(2). 由 $\pi_L^{-1}(y)=y+\pi_L^{-1}(\theta)$ 立得. □

定理 1.2.16 设 X 为 Banach 空间, L 为 Chebyshev 子空间, $\pi_L: X\to L$ 为度量投影算子, $P: X\longrightarrow L$ 为单值算子, 则 $P=\pi_L \Longleftrightarrow$

(1) $P^{-1}(\theta)=F_X^{-1}(L^{\perp})$,

(2) $P(x+y)=\pi(x)+y,\qquad \forall\, x\in X,\ y\in L.$

证明 必要性. 设 $P=\pi_L$, 则 (2) 为真. 下面证 (1), $\forall\, x\in P^{-1}(\theta)$, 有 $\pi_L(x)=\theta$, 由广义正交分解定理 (推论 1.2.10), 存在唯一 $x_1\in F_X^{-1}(L^{\perp})$. 满足

$$x=\pi_L(x)+x_1=x_1\in F_X^{-1}(L^{\perp}),$$

即

$$P^{-1}(\theta)\subset F_X^{-1}(L^{\perp}).$$

反之, $\forall\, x\in F_X^{-1}(L^{\perp})$, 与上同理, 存在唯一的 $x_1\in F_X^{-1}(L^{\perp})$, 满足

$$x=\pi_L(x)+x_1.$$

另一方面

$$x=\theta+x,\qquad \theta\in L,\ x\in F_X^{-1}(L^{\perp}).$$

由分解式的唯一性, 有 $\pi_L(x)=\theta$, 从而

$$x \in \pi_L^{-1}(\theta) = \pi^{-1}(\theta),$$

因此

$$F_X^{-1}(L^{\perp}) \subset \pi^{-1}(\theta).$$

充分性. $\forall x \in X$, 往证 $P(x) = \pi_L(x)$.

首先，由于 L 为 Chebyshev 子空间，$\pi_L(x)$ 唯一存在，且 $\pi_L(x) \in L$.

对于上面的 x, 应用广义正交分解定理，有

$$x = \pi_L(x) + x_1, \qquad x_1 \in F_X^{-1}(L^{\perp}).$$

由条件 (1), $x_1 \in P^{-1}(\theta)$, 即 $P(x_1) = \theta$, 再由条件 (2), 有

$$\begin{aligned} P(x) &= P(\pi_L(x) + x_1) \\ &= \pi_L(x) + P(x_1) \\ &= \pi_L(x), \end{aligned}$$

因此

$$P = \pi_L. \qquad \square$$

定理 1.2.17　设 X 自反 Banach 空间，$x_0^* \in X^*$, $L = \{x \in X \mid \langle x,\ x_0^* \rangle = 0\}$ 为 X 中的超平面，则

(1) $\forall\, x \in X$

$$\mathcal{P}_L(x) = x - \frac{\langle x,\ x_0^* \rangle}{\|x_0^*\|^2} F_X^{-1}(x_0^*), \tag{1.2.24}$$

这里的等号为集合相等.

(2) 若 X 自反，严格凸，则 π_L 为有界线性算子，且 $\forall\, x \in X$, 有

$$\pi_L(x) = x - \frac{\langle x,\ x_0^* \rangle}{\|x_0^*\|^2} F_X^{-1}(x_0^*). \tag{1.2.25}$$

证明　超平面 $L = \{x \in X \mid \langle x,\ x_0^* \rangle = 0\}$ 为 X 中极大线性子空间, 取 $x_0 \in X \backslash L$, 则 $\langle x,\ x_0^* \rangle \neq 0$ 且

$$X = L \dotplus \{\tau x_0 :\ \tau \in R^1\}.$$

令

$$H = \{\lambda x_0^* :\ \lambda \in R^1\},$$

易知 $H \subset L^{\perp}$. 反之，$\forall\, x^* \in L^{\perp}$, 令

$$\lambda_0 = \frac{\langle x_0,\ x^* \rangle}{\langle x_0,\ x_0^* \rangle},$$

则 $\forall\, x \in X$, $\exists x_1 \in L$, $\tau_0 \in R^1$ 满足

$$x = x_1 + \tau_0 x_0,$$

于是

$$\langle x,\ x^*\rangle = \tau_0\langle x_0,\ x^*\rangle.$$

而

$$\begin{aligned}\langle x,\ \lambda_0 x_0^*\rangle &= \tau_0\lambda_0\langle x_0,\ x_0^*\rangle\\ &= \frac{\langle x_0,\ x^*\rangle}{\langle x_0,\ x_0^*\rangle}\tau_0\langle x_0,\ x_0^*\rangle\\ &= \tau_0\langle x_0,\ x^*\rangle.\end{aligned}$$

于是

$$\langle x,\ x^*\rangle = \langle x,\ \lambda_0 x_0^*\rangle, \qquad \forall x \in X.$$

从而

$$x^* = \lambda_0 x_0^* \in H,$$

因此

$$H = L^{\perp}.$$

下面证 (1.2.24) 式.

$\forall\, x \in X$, 由 X 的自反性, $\mathcal{P}_L(x) \neq \varnothing$. 取 $x_0 \in \mathcal{P}_L(x)$. 由定理 1.2.8 中 (2), 有

$$F_X(x - x_0) \cap L^{\perp} \neq \varnothing.$$

因为 $L^{\perp} = H$, 从而存在 $\lambda_0 \in R^1$, 满足

$$\lambda_0 x_0^* \in F_X(x - x_0), \quad 且 \quad x_0^* \in L^{\perp}.$$

换言之,

$$x - x_0 \in F_X^{-1}(\lambda_0 x_0^*) = \lambda_0 F_X^{-1}(x_0^*). \tag{1.2.26}$$

取 $x_1 \in F_X^{-1}(x_0^*)$, 满足

$$x - x_0 = \lambda_0 x_1. \tag{1.2.27}$$

用 x_0^* 作用 (1.2.27) 式的两端, 有

$$\begin{aligned}\langle x,\ x_0^*\rangle &= \langle x_0 + \lambda_0 x_1,\ x_0^*\rangle\\ &= \lambda_0\langle x_1,\ x_0^*\rangle\\ &= \lambda_0\|x_0^*\|^2,\end{aligned}$$

于是

$$\lambda_0 = \frac{\langle x,\ x_0^*\rangle}{\|x_0^*\|^2}. \tag{1.2.28}$$

再由 (1.2.26) 及 (1.2.28) 有

$$x_0 \in x - \frac{\langle x,\ x_0^*\rangle}{\|x_0^*\|^2}F_X^{-1}(x_0^*),$$

即

$$\mathcal{P}_L(x) \subset x - \frac{\langle x,\ x_0^*\rangle}{\|x_0^*\|^2} F_X^{-1}(x_0^*).$$

反之，设 $x_0 \in x - \dfrac{\langle x,\ x_0^*\rangle}{\|x_0^*\|^2} F_X^{-1}(x_0^*)$, 取 $x_1 \in F_X^{-1}(x_0^*)$, 满足

$$x_0 = x - \frac{\langle x,\ x_0^*\rangle}{\|x_0^*\|^2} x_1,$$

易知 $\langle x_0,\ x_0^*\rangle = 0$, 从而 $x_0 \in L$, 且

$$\begin{aligned} x - x_0 \in & \frac{\langle x,\ x_0^*\rangle}{\|x_0^*\|^2} F_X^{-1}(x_0^*) \\ = & F_X^{-1}\left(\frac{\langle x,\ x_0^*\rangle}{\|x_0^*\|^2} x_0^*\right), \end{aligned}$$

从而

$$\frac{\langle x,\ x_0^*\rangle}{\|x_0^*\|^2} x_0^* \in F(x - x_0).$$

再由 $x_0^* \in L^\perp$, 知

$$F_X(x - x_0) \cap L^\perp \neq \varnothing.$$

于是由定理 1.2.8 中 (2), 知

$$x_0 \in \mathcal{P}_L(x).$$

因此

$$x - \frac{\langle x,\ x_0^*\rangle}{\|x_0^*\|^2} F_X^{-1}(x_0^*) \subset \mathcal{P}_L(x).$$

(2) 由 X 的自反，严格凸性及 (1) 可得. □

§1.3 拟线性投影算子

Banach 空间中有界线性投影算子、度量投影算子都满足有界性、齐性、拟可加性及幂等性. 由此，我们在赋范线性空间中引入 (有界) 拟线性投影算子的概念. 我们证得：在自反 Banach 空间 X 中，对每个闭子空间 L, 都存在 X 到 L 上的有界拟线性投影算子 S_L, 如果 X 为非空 Hilbert 空间的自反 Banach 空间， L 为非超平面的闭子空间， S_L 一般为非线性的非度量投影算子.

1. 拟线性投影算子的定义与性质

首先引进赋范线性空间中拟线性投影算子的定义.

定义 1.3.1 设 S 为赋范线性空间 X 中的算子，令 $L = R(S)$ 为 S 的值域，如果 S 满足:

(i) S 为齐性的，即 $S(\lambda x) = \lambda S(x),\ \ x \in X, \lambda \in R$;

(ii) S 为幂等的，即 $S^2 = S$;

(iii) S 为拟可加的，即对任意 $x \in X, y \in L = R(S)$, 有

$$S(x+y) = S(x) + y,$$

则称 S 为 X 到 L 上的拟线性投影算子. 如果 S 还满足

(iv) S 为有界的，即 S 将有界集映成有界集，则称 S 为 X 到 L 上的有界拟线性投影算子.

设 X, Y 为 Banach 空间,记从 X 到 Y 的有界齐性算子所构成的集合为 $H(X,Y)$, 将其装备通常的线性运算，且定义范数

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|, \quad T \in H(X,Y),$$

则 $(H(X,Y), \|\cdot\|)$ 为 Banach 空间，简记为 $H(X,Y)$.

引理 1.3.1 如果 T 为赋范空间 X 中齐性算子，则下述命题等价:

(i) T 为有界的;

(ii) 存在正数 $C > 0$, 满足

$$\|T(x)\| \leqslant C\|x\|, \quad x \in X;$$

(iii) T 在零点 θ 处连续.

证明 (i)⇒(ii). 如 (ii) 不真，对自然数 $n \geqslant 1$, 存在 $x_n \in X$, 满足

$$\|T(x_n)\| > 2n\|x_n\| \quad (n = 1, 2, \cdots), \tag{1.3.1}$$

从而 $x_n \neq \theta (n \geqslant 1)$, 则 $\left\{\dfrac{x_n}{\|x_n\|}\right\}$ 为 X 中有界序列，然而

$$\left\|T\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right\| = \frac{\|T(x_n)\|}{\|x_n\|} > 2n, \quad n = 1, 2 \cdots .$$

这与 (i) 矛盾.

(ii) ⇒(iii). 明显.

(iii) ⇒(ii). 如 (ii) 不真，对自然数 $n \geqslant 1$, 有 $x_n \in X$ 满足 (1.3.1), 由于 T 为齐性算子，有

$$\left\|T\left(\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right)\right\| = \frac{\|T(x_n)\|}{n\|x_n\|} > 2 \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

于是 $\dfrac{x_n}{n\|x_n\|} \to \theta \quad (n \to \infty)$. 但

$$T\left(\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right) \not\to T(\theta) = \theta \ (n \to \infty),$$

这与 (iii) 矛盾.

(ii) ⇒(i). 明显. □

记 $H(X) = H(X,X)$, L 为 X 的闭子空间. 令

$$Q_L(X)=\{S\in H(X):S\text{为有界拟线性投影算子且 } L=R(S)\},$$

则有下面的定理.

定理 1.3.1　设 X 为赋范线性空间，S 为 X 中有界拟线性投影算子，$L=R(S)$，则有

(1) L 为 X 中闭子空间；

(2) $Q_L(X)$ 为空间 $H(X)$ 中闭仿射流形；

(3) $\operatorname{dist}(I,Q_L(X))=\inf\limits_{S\in Q_L(X)}\|I-S\|_{H(X)}\geqslant 1$；

(4) $S_0\in Q_L(X)$，满足 $\|I-S_0\|_{H(X)}=1$，即 S_0 为 I 到 $Q_L(X)$ 上最佳逼近元，当且仅当对每个 $x\in X,S_0(x)\in L$ 为 x 到 L 上的最佳逼近元，即

$$\|x-S_0(x)\|_X=\operatorname{dist}(x,L).$$

证明　(1) 因为 S 为齐性算子，从而 S 的值域 $L=R(S)$ 为 X 中的齐性集，即对任意 $x\in L,\lambda\in R$，有 $\lambda x\in L$.

对任意 $x,y\in L=R(S)$，由 S 的拟可加性与幂等性，有

$$S(x+y)=S(x)+y=x+y,$$

从而 $x+y\in R(S)=L$，即 L 为 X 的线性子空间.

为证 L 的闭性，任取 $x_0\in\bar{L}$ 及 $\{x_n\}\subset L$ 使 $x_0-x_n\to\theta\ \ (n\to\infty)$. 因为 S 为有界齐性算子，由引理 1.3.1，S 在 θ 处连续．于是

$$S(x_0-x_n)=S(x_0)-x_n\to S(\theta)=\theta\quad(n\to\infty).$$

于是 $x_0=S(x_0)\in R(S)=L$，即 L 为 X 中的闭子空间.

(2) 先证 $Q_L(X)$ 为 $H(X)$ 中仿射流形.

任取 $S_1,S_2\in Q_L(X),\lambda\in R$，令 $S=\lambda S_1+(1-\lambda)S_2$，则 $S\in H(X)$.

对任意 $x\in X$，由 S_1 与 S_2 的幂等性，有 $S_1S_2(x)=S_2(x)$ 且 $S_2S_1(x)=S_1(x)$，再由 S_1 与 S_2 的齐性与拟可加性，有

$$\begin{aligned}S^2(x)&=[\lambda S_1(x)+(1-\lambda)S_2(x)][\lambda S_1(x)+(1-\lambda)S_2(x)]\\&=[\lambda^2+(1-\lambda)\lambda]S_1(x)+[\lambda(1-\lambda)+(1-\lambda)^2]S_2(x)\\&=S(x),\end{aligned}$$

即 S 为幂等的.

对任意 $x\in L$，有 $S_1(x)=S_2(x)=x$，从而 $x=\lambda S_1(x)+(1-\lambda)S_2(x)=S(x)\in R(S)$，即 $L\subset R(S)$. 反之，对任意 $x\in X,S_1(x)\in L\subset R(S)$，且 $S_2(x)\in L\subset R(S)$，故有

$$\begin{aligned}S_1S(x)&=\lambda S_1^2(x)+(1-\lambda)S_1S_2(x)\\&=\lambda S_1(x)+(1-\lambda)S_2(x)\\&=S(x).\end{aligned}$$

因此， $S(x) \in R(S_1) = L$, 从而 $R(S) \subset L$, 因此 $L = R(S)$.

最后证 S 为拟可加的，从而 $S \in Q_L(X), Q_L(X)$ 为仿射集.

对任意 $x \in X, y \in L = R(S)$, 由于 $L = R(S_1) = R(S_2)$, 且 S_1 与 S_2 为拟可加的，我们有

$$\begin{aligned} S(x+y) &= [\lambda S_1 + (1-\lambda)S_2](x+y) \\ &= \lambda S_1(x+y) + (1-\lambda)S_2(x+y) \\ &= \lambda[S_1(x)+y] + (1-\lambda)[S_2(x)+y] \\ &= S(x)+y, \end{aligned}$$

即 S 为拟可加的.

再证 $Q_L(X)$ 在 $H(X)$ 中为闭的.

设 $\{S_n\} \subset Q_L(X)$, 使得

$$\|S_n - S\|_{H(X)} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

需往证 $S \in Q_L(X)$.

由 $H(X)$ 的完备性，知 $S \in H(X)$. 对任意 $x \in X$, 有

$$S^2(x) = \lim_{n\to\infty} S_n^2(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x),$$

因此 $S^2 = S$.

再证 $L = R(S)$. 对任意 $y \in R(S)$, 存在 $x \in X$, 满足 $y = S(x)$, 再由 L 的闭性，得

$$y = \lim_{n\to\infty} S_n(x) \in L.$$

因此 $R(S) \subset L$. 反之对任意 $x \in L = R(S_n)$, 知 $x = S_n(x) \quad (n = 1, 2, \cdots)$, 从而

$$x = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) \in R(S),$$

故 $L \subset R(S)$, 因此 $L = R(S)$.

最后证 S 为拟可加的.

对任意 $x \in X, y \in L = R(S)$, 由于 $L = R(S_n)(n = 1, 2, \cdots), S_n$ 为拟可加的则有

$$\begin{aligned} S(x+y) &= \lim_{n\to\infty} S_n(x+y) \\ &= \lim_{n\to\infty} [S_n(x)+y] \\ &= S(x)+y. \end{aligned}$$

因此 $S \in Q_L(X)$, 从而 $Q_L(X)$ 为闭的.

(3) 对于任意 $S \in Q_L(X), x \in X\backslash L$, 因为 L 为闭子空间，故 $\|x - S(x)\|_X > 0$. 由 S 的拟可加性与幂等性，有

$$(I-S)(x-S(x))=x-S(x),$$

于是

$$\|x-S(x)\|_X\leqslant\|I-S\|_{H(X)}\|x-S(x)\|_X.$$

因此

$$\|I-S\|_{H(X)}\geqslant 1,$$

从而

$$\operatorname{dist}(I,Q_L(X))\geqslant 1.$$

(4) 必要性. 设 $S_0\in Q_L(X)$ 使得

$$\|I-S_0\|_{H(X)}=1,$$

则对任意 $w\in R(I-S_0)=N(S_0),Q$ 与 $z\in R(S_0)$, 由 S_0 的幂等性与拟可加性，有

$$S_0(w-z)=S_0(w)-z=-z,$$

于是

$$\begin{aligned}\|w\|_X&=\|(I-S_0)(w-z)\|_X\\&\leqslant\|I-S_0\|_{H(X)}\|w-z\|_X\\&=\|w-z\|_X,\end{aligned}$$

因此

$$\|w\|_X=\operatorname{dist}(w,R(S_0)).\tag{1.3.2}$$

对任意 $x\in X,S_0(x)\in L$, 又对任意 $y\in L=R(S_0)$, 有

$$x-y=(I-S_0)(x)-S_0(y-x).\tag{1.3.3}$$

令 $w=(I-S_0)(x),z=S_0(y-x)$, 则 $w\in R(I-S_0)=N(S_0),z\in R(S_0)$, 由 (1.3.2) 与 (1.3.3) 式，有

$$\begin{aligned}\|x-y\|_X&=\|(I-S_0)(x)-S_0(y-x)\|_X\\&\geqslant\operatorname{dist}((I-S_0)(x),R(S_0))=\|x-S_0(x)\|_X,\end{aligned}$$

于是

$$\|x-S_0(x)\|_X=\operatorname{dist}(x,L).\tag{1.3.4}$$

充分性. 设对任意的 $x\in X$,(1.3.4) 为真. 首先，对 x 有分解式

$$x=S_0(x)+(I-S_0)(x)=y+z,$$

这里 $y=S_0(x)\in R(S_0),z=(I-S_0)(x)\in R(I-S_0)=N(S_0)$, 从而有

$$\begin{aligned}\|x\|_X&=\|z-(-y)\|_X\\&\geqslant\|z-S_0(z)\|_X=\|z-S_0(I-S_0)(x)\|_X\end{aligned}$$

$$= \|z\|_X = \|(I - S_0)(x)\|_X, \tag{1.3.5}$$

于是

$$\|I - S_0\|_{H(X)} = 1. \qquad \square$$

定理 1.3.2 设 X 为自反、严格凸 Banach 空间, S 为 X 中有界拟线性投影算子, $L = R(S)$ 为 S 的 Chebyshev 值域, 则 S 为 X 到 L 上的度量投影当且仅当 $S^{-1}(\theta) = F_X^{-1}(L^\perp)$, 这里 F_X 为空间 X 的对偶映射.

证明 应用定理 1.2.16 立得. $\square$

2. 有界拟线性投影算子的存在性

如所周知, 对于 Banach 空间 X 中每个闭子空间 L, 都存在 X 到 L 上的有界线性投影算子, 当且仅当 X 与某 Hilbert 空间拓扑同构 [LT]; 对 Banach 空间 X 中每个闭子空间 L, 都存在 X 到 L 上的度量投影算子, 即 L 为 Chebyshev 子空间的充分必要条件是空间 X 自反、严格凸 [Si]. 因而, 在自反非严格凸 Banach 空间 X 中, 如果 X 又不与 Hilbert 空间拓扑同构, 则在 X 中必存在闭子空间 L_1 与 L_2, 使 X 到 L_1 上不存在有界线性投影算子, X 到 L_2 上不存在度量投影算子. 我们有下面的定理:

定理 1.3.3 设 X 为自反 Banach 空间, L 为 X 中闭子空间, 则存在 X 到 L 的有界拟线性投影算子 S_L, 且当 X 为非 Hilbert 空间, 且 L 为非超平面时, S_L 一般为非线性的非度量投影算子.

证明 (1) 设 X 为自反、严格凸 Banach 空间.

X 的闭子空间 L 为 X 的 Chebyshev 子空间, 设 $\pi_L : X \to L$ 为 X 到 L 上的度量投影算子.

对于任意的 $y_0 \notin L$, 由 Hahn-Banach 定理, 存在连续线性泛函 $y^* \in X^*$ 使得 $\langle y^*, y_0\rangle = 1$ 且 $\langle y^*, z\rangle = 0, z \in L$.

取 $z_0 \in L$ 且 $z_0 \neq \pi_L(y_0)$, 定义

$$S(y) = \pi_L(y) - \langle y^*, y\rangle[\pi_L(y_0) - z_0], \tag{1.3.6}$$

则 S 显然为 X 中有界齐性算子, 且 $R(S) = L$.

$$S(y_0) = \pi_L(y_0) - \langle y^*, y_0\rangle[\pi_L(y_0) - z_0] = z_0. \tag{1.3.7}$$

对于任意 $x \in X, y \in L = R(S)$, 有

$$\begin{aligned} S(x+y) &= \pi_L(x+y) - \langle y^*, x+y\rangle[\pi_L(y_0) - z_0] \\ &= \pi_L(x) + y - \langle y^*, x\rangle[\pi_L(y_0) - z_0] \\ &= S(x) + y. \end{aligned}$$

因此, S 为拟可加的.

对任意 $x \in X$, 有

$$S^2(x) = \pi_L(S(x)) - \langle y^*, S(x)\rangle[\pi_L(y_0) - z_0] = S(x),$$

即 S 为幂等的.

综上所述， S 为 X 到 L 上的有界拟线性投影算子.

由于 $S(y_0) = z_0 \neq \pi_L(y_0)$, 而 L 为 Chebyshev 子空间， X 到 L 上的度量投影算子只有 π_L, 因而 S 为 X 到 L 上的非度量算子.

如果 X 为非 Hilbert 空间的自反 Banach 空间，而 L 又非为 X 中闭超平面，则一般说来， $\pi_L : X \to L$ 为非线性算子，从而 $S : X \to L$ 为非线性算子.

(2) 设 X 为自反非严格凸 Banach 空间，则由 ([Yu1] p.299, 表 (I)) X 上可赋与原范数 $\|\cdot\|$ 等价的严格凸范数 $\|\cdot\|_1$. L 亦为自反严格凸 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|_1)$ 中闭子空间，从而为 Chebyshev 子空间. 记 $\hat{\pi}_L$ 为 $(X, \|\cdot\|_1)$ 到 L 上的度量投影算子.

选 $y_0 \notin L, z_0 \in \text{int}L$, 则

$$\hat{\pi}_L(y_0) \in L\backslash\text{int}L, \tag{1.3.8}$$

因此 $z_0 \neq \hat{\pi}_L(y_0)$.

类似 (1) 定义 $S : X \to L$ 如下：

$$S(y) = \hat{\pi}_L(y) - \langle y^*, y\rangle[\hat{\pi}_L(y_0) - z_0], \quad y \in X,$$

其中 $y^* \in L^{\perp}$, 且 $\langle y^*, y_0\rangle = 1$. 由 (1), S 为从 $(X, \|\cdot\|_1)$ 到 L 上的有界拟线性投影算子，而且 $S(y_0) = z_0$.

由 (1) 可知，若 X 为非 Hilbert 空间，且 L 为非超平面的闭子空间时，$S : X \to L$ 一般为非线性算子.

下面证：

$$\|S(y_0) - y_0\| > \inf_{z \in L} \|z - y_0\|, \tag{1.3.9}$$

从而 S 在 X 中为非度量算子.

事实上，因为 $S(y_0) = z_0 \in \text{int}L$, 从而存在 $r > 0$, 使

$$B(z_0, r) = \{x \in X \mid \|x - z_0\| \leqslant r\} \subset L,$$

作 X 中连接 z_0 与 y_0 的线段

$$[z_0, y_0] = \{\lambda z_0 + (1 - \lambda)y_0 \mid \ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}.$$

由于 $y_0 \notin L, z_0 \in B(z_0, r) \subset L$, 故有 $\|z_0 - y_0\| > r$. 令

$$x_\lambda = \lambda z_0 + (1 - \lambda)y_0, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

则

$$\|z_0 - x_\lambda\| = (1-\lambda)\|z_0 - y_0\|, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

定义 $f:[0,1] \to R^1_+$ 为

$$f(\lambda) = \|z_0 - x_\lambda\| = (1-\lambda)\|z_0 - y_0\|, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

则 f 为连续函数，且

$$f(1) = 0 < r < \|z_0 - y_0\| = f(0). \tag{1.3.10}$$

由介值定理，存在 $\lambda_0 \in (0,1)$, 使

$$f(\lambda_0) = \|z_0 - x_{\lambda_0}\| = r,$$

于是

$$x_{\lambda_0} \in B(z_0, r) \subset L.$$

由 (1.3.10), 有

$$\begin{aligned}\inf_{z\in L} \|z - y_0\| &\leqslant \|x_{\lambda_0} - y_0\| = \|z_0 - y_0\| - r \\ &< \|z_0 - y_0\| = \|S(y_0) - y_0\|.\end{aligned}$$

因此 (1.3.9) 式为真. □

3. 有限秩拟线性投影算子的逼近问题

1973 年，P. Enflo[En] 给出著名的反例表明：存在可分的 Banach 空间，在其中恒等算子在紧集上不能用有限秩有界线性投影算子列一致逼近. 这表明有限秩有界线性投影算子还不够"多". 利用有界拟线性投影算子可以解决这个逼近问题.

定理 1.3.4 设 X 为 Banach 空间，恒等算子 I 在 X 中任何相对紧集 B 上，均可由一列有限秩连续拟线性投影算子所一致逼近，即存在一列连续拟线性投影算子 $\{S_n\}$, 满足 $\dim R(S_n) < \infty$, 且

$$\sup_{x\in B} \|(I - S_n)(x)\| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{1.3.11}$$

证明 将证明分两步.

(i) X 为严格凸 Banach 空间.

因 B 为 X 中相对紧集，对任意自然数 $n \geqslant 1$, 在 B 中存在有限的 $\dfrac{1}{4n}$ 网 $\{x_1, x_2, \cdots, x_{m_n}\}$, 满足

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{m_n} B\Big(x_i, \frac{1}{4n}\Big). \tag{1.3.12}$$

取 $X_n = \mathrm{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_{m_n}\}$,$X_n$ 为严格凸 Banach 空间 X 中的有限维闭子空间，从而 X_n 为 Chebyshev 子空间. 令

$$S_n = \pi_{X_n}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

则 $\dim R(S_n) = \dim X_n < \infty$. 且由推论 1.2.13, S_n 为从 X 到 X_n 的拟线性投影算子，再由定理 1.2.14 后面的注记， $S_n = \pi_{X_n}$ 从 X 到 X_n 上是连续的. 从而 $\{S_n\}$ 为有限秩连续拟线性投影算子列.

对任意 $x \in B$, 存在 x_{i_0} $(1 \leqslant i_0 \leqslant m_n)$,

$$\|x - x_{i_0}\| < \frac{1}{4n}.$$

由于 $-x_{i_0} \in X_n$, 由推论 1.2.13,

$$S_n(x - x_{i_0}) = S_n(x) - x_{i_0},$$

且

$$\begin{aligned}\|S_n(x) - x_{i_0}\| &= \|S_n(x - x_{i_0})\| \\ &= \|\pi_{X_n}(x - x_{i_0})\| \\ &\leqslant 2\|x - x_{i_0}\| \\ &< \frac{1}{2n}, \quad n = 1, 2, \cdots,\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\|(I - S_n)(x)\| &= \|x - S_n(x)\| \\ &\leqslant \|x - x_{i_0}\| + \|x_{i_0} - S_n(x)\| \\ &< \frac{1}{4n} + \frac{1}{2n} = \frac{3}{4n} \quad n = 1, 2, \cdots,\end{aligned}$$

因此

$$\sup_{x \in B} \|(I - S_n)(x)\| \leqslant \frac{3}{4n} < \frac{1}{n} \to 0 \quad n \to \infty.$$

(ii) X 为非严格凸 Banach 空间.

因为 B 为 X 中相对紧集合，令

$$X_1 = \overline{\text{span}}(B),$$

则 X_1 为可分的 Banach 空间. 由再赋范定理 (见 [Yu1]p.280, 推论 5.3.7), 在 X_1 上可赋等价的严格凸范数 $\|\cdot\|_1$, 即存在 $c, d > 0$, 满足

$$c\|x\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant d\|x\|, \quad x \in X_1,$$

且 $(X_1, \|\cdot\|_1)$ 为严格凸 Banach 空间. 简记为 X_1. $B \subset X_1$ 亦为 X_1 的相对紧集.

由 (i) 所证，在 X_1 中存在有限秩连续拟线性投影算子列 $\{S_n\}$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \geqslant 1$, 使得当 $n \geqslant N$ 时，有

$$\sup_{x \in B} \|(I - S_n)(x)\| < c\varepsilon.$$

因为范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|$ 等价，从而 $\{S_n\}$ 为 X 中有限秩连续拟线性投影算子列 (在 X 中， S_n 不一定为度量投影算子), 且当 $n_1 \geqslant N$ 时，有

$$\sup_{x\in B}\|(I-S_n)(x)\| \leqslant \frac{1}{c}\sup_{x\in B}\|(I-S_n)(x)\|_1 < \varepsilon,$$

即

$$\sup_{x\in B}\|(I-S_n)(x)\| \to 0, \quad n\to\infty. \qquad \square$$

【注 释】

本章首先分别介绍了 Banach 空间中有界线性投影算子，度量投影算子，然后统一到有界拟线性投影算子中.

§1.1 结合拓扑可补子空间，引入并研究了有界线性投影算子，见 [DS], 其中空间 $l_p(p\neq 2)$ 中，存在不可补的闭子空间，首先由 Murray[Mur] 给出证明，但由 Sobczyk[So] 给予简化. 本节相应内容取自 [Zao]. 定理 1.1.7 为一个重要的结果，见 [LT] 或 [Yu2].

§1.2 关于 Banach 空间的对偶映射及其对空间几何性质的刻画，见 [BP]. 引理 1.2.1 及其证明取自定光桂的专著 [Di]. 利用凸分析对其简化证明见 [BR]. 定理 1.2.9 取自王玉文与李志伟的论文 [WL1]. 广义正交分解定理 (推论 1.2.11) 在研究度量广义逆时，起到关键作用，取自 [WhW]. 有关度量投影算子的内容取自 [Si], 其中定理 1.2.16 与定理 1.2.17 取自王玉文与于金凤的论文 [WY1].

§1.3 将有界线性算子与度量投影算子的三条共有性质作为公理，给出有界拟线性投影算子的定义，参见王玉文、李双臻的 [WLZ]. 在自反 (非 Hilbert 空间) 无穷维 Banach 空间中的每个闭子空间上，均存在有界拟线性投影算子，使其既非有界线性投影算子，又非度量投影算子的例子，由栾丛海与王玉文 [LW] 给出. 其中 §1.1 中的 3* 首次阅读可略去.

本书所需的 Banach 空间几何的知识，参见 [Yu1] 或南朝勋未出版的讲义《 Banach 空间几何讲义》.

第二章　线性算子的线性斜投影广义逆

在 Moore[Mo] 用代数方法引进矩阵广义逆之前，Fredholm[Fre], Hilbert, Schmidt, Bounitzky, Hurwitz(参见 [HS]) 等学者曾研究过积分算子、微分算子的广义逆．在 Moore 引进矩阵广义逆之后， Penrose[Pe1] 引进 Penrose 条件之前， Y.Y.Tseng(曾远荣)[Ts1~Ts5] 引进 Hilbert 空间线性算子的广义逆．近年来，由于科学技术的发展和实际问题的需要，人们对抽象空间中线性算子的广义逆的研究产生了浓厚的兴趣.

本章中，我们将对 Banach 空间内线性算子的线性斜投影广义逆的定义、性质、扰动及其应用进行介绍.

§2.1　线性内逆与线性外逆

1. 线性变换的内逆与外逆

设 V 为线性空间， V_1, V_2 为 V 的线性子空间．如果 $V = V_1 \dot{+} V_2$(代数直和)，则称 V_1 在 V 中代数可补， V_2 为 V_1 的代数补子空间.

V 内线性幂等映射 P, 称为 V 内的线性投影．记 $R(P), N(P)$ 分别为 P 的值域与零空间，则

$$V = R(P) \dot{+} N(P).$$

令 $V_1 = R(P), V_2 = N(P)$, 则 P 称为 V 内沿 V_2 到 V_1 上的线性投影.

由定理 1.1.1, 线性空间 V 内每个线性子空间 L 均为代数可补子空间.

设 U, V 为线性空间， $L(U, V)$ 为从 U 到 V 的线性变换全体组成的线性空间.

定义 2.1.1　设 $T \in L(U, V)$. 若 $S \in L(V, U)$ 且满足

$$TST = T, \tag{2.1.1}$$

则称 S 为 T 的线性内逆．T 的一切线性内逆的全体记为 $I(T)$. 显然 $I(T)$ 为 $L(U, V)$ 中的仿射流形.

S 是线性内逆，可简称为内逆．也称为偏逆或 1- 逆，记为 T^-.

定理 2.1.1　从 U 到 V 的每个线性变换 $T \in L(U, V)$ 均存在线性内逆 $S \in L(V, U)$.

证明　线性子空间 $N(T), R(T)$ 分别在 U 与 V 中代数可补．设 M 与 G 分别为 U 与 V 中线性子空间，使得

$$U = N(T) \dot{+} M \quad 且 \quad V = R(T) \dot{+} G.$$

令 $\widetilde{T} = T|_M$, 则 $\widetilde{T} : M \to R(T)$ 为一对一到上的线性变换，从而有逆线性变换 $\widetilde{T}^{-1} : R(T) \to M$, 满足 $M = R(\widetilde{T}^{-1})$.

定义 $S: V \to M$ 为

$$S = \widetilde{T}^{-1}Q,$$

其中 $Q: V \to R(T)$ 为在 V 中沿 G 到 $R(T)$ 上的线性投影，于是 $S \in L(V,U)$, 而且 $\forall u \in U$, 有 $u = u_0 + u_1$, $u_0 \in N(T)$, $u_1 \in M$, 因此

$$TSTu = T\widetilde{T}^{-1}QTu_1 = Tu_1 = Tu.$$

即 S 为 T 的线性内逆. □

定理 2.1.2 设 $T \in L(U,V)$, $S \in L(V,U)$ 为 T 的内逆. 则

(i) 线性变换 $I - ST$ 为沿 M 到 $N(T)$ 上的线性投影且 $N(T) = R(I - ST)$; $\forall z \in U$, $(I - ST)z$ 为齐次方程 $Tx = \theta$ 的解;

(ii) $\forall y \in V$, 方程 $Tx = y$ 有解当且仅当 $TSy = y$;

(iii) $\forall y \in R(T)$, 方程 $Tx = y$ 的通解为 $Sy + (I - ST)z$, $z \in U$;

(iv) $\forall y \in V$, Sy 为方程 $Tx = y$ 在下述定义下的"逼近解"，即 Sy 为"投影"方程

$$Tx = Qy$$

的解，其中 Q 为在 V 中沿 $N(TS)$ 到 $R(T)$ 上的线性投影.

证明 (i) $I - ST$ 显然为线性，幂等的，且 $R(I - ST) \subset N(T)$. 反之， $\forall u \in N(T)$, $u = (I - ST)u \in R(I - ST)$. $\forall z \in U$. $T(I - ST)z = \theta$.

(ii) 只须证必要性. $\forall y \in V$, 设 $Tx = y$ 有解 x_0, 即 $Tx_0 = y$. 由内逆的定义，有 $TSy = TSTx_0 = Tx_0 = y$. 因此

$$TSy = y.$$

(iii) 显然.

(iv) 由定义 2.1.1 知 TS 为幂等的，且 $R(TS) = R(T)$. 又 TS 为线性的，从而

$$V = R(TS) \dot{+} N(TS) = R(T) \dot{+} N(TS).$$

设 $Q = TS$, 则 Q 为在 V 中沿 $N(TS)$ 到 $R(T)$ 上的线性投影. 因此，

$$TSy = Qy.$$

即 Sy 为 $Tx = Qy$ 的解. □

定理 2.1.3 设 $T \in L(U,V)$, $S \in L(V,U)$ 为 T 的内逆，则

(i) ST 为 U 中线性投影， $R(ST) \subset R(S)$, $N(ST) = N(T)$ 且

$$U = R(ST) \dot{+} N(ST) = R(ST) \dot{+} N(T).$$

(ii) TS 为 V 中的线性投影， $N(S) \subset N(TS)$, $R(TS) = R(T)$ 且

$$V = R(TS) \dot{+} N(TS) = R(T) \dot{+} N(TS).$$

(iii) $R(T) \cap N(S) = \{\theta\}$.

证明　(i) 由定义 2.1.1, 只须证 $N(ST) = N(T)$. 显然 $N(T) \subset N(ST)$. 反之, $\forall v \in N(ST)$, 有 $STv = \theta$, 从而

$$Tv = TSTv = T\theta = \theta,$$

即 $v \in N(T)$. 因此 $N(T) = N(ST)$. (ii) 与 (iii) 同理可证. □

定理 2.1.4　设 $T \in L(U,V)$, $S \in L(V,U)$, 则下述命题等价

(a) $S \in I(T)$;

(b) TS 为幂等的且 $R(TS) = R(T)$;

(c) TS 为幂等的且 $V = R(T) \dot{+} N(TS)$;

(d) ST 为幂等的且 $N(ST) = N(T)$;

(e) ST 为幂等的且 $U = N(T) \dot{+} R(ST)$;

(f) $\forall y \in R(T)$, Sy 为方程 $Tx = y$ 的解.

证明　(a)⇒(b)⇒(c)⇒(b). 明显.

(b)⇒(a). 设 TS 幂等且 $R(TS) = R(T)$. $\forall x \in U$, $Tx \in R(T) = R(TS)$, 从而存在 $y \in V$, 使 $Tx = TSy$, 于是

$$TSTx = TSTSy = TSy = Tx.$$

因此 $S \in I(T)$.

(a)⇒(d)⇒(e). 显然.　(e)⇒(a).

设 (e) 为真. $\forall x \in U = N(T) \dot{+} R(ST)$, 则 $x = x_0 + x_1$, $x_0 \in N(T)$, $x_1 \in R(ST)$. 设 $x_1 = STy_1$, $y_1 \in U$, 则

$$\begin{aligned} TSTx &= TST(x_0 + x_1) = TSTx_1 \\ &= TSTSTy_1 = TSTy_1 \\ &= Tx_1 = Tx. \end{aligned}$$

因此, $TST = T$. 即 $S \in I(T)$.

(a)⇔(f). 由定理 2.1.2, 易知. □

定理 2.1.5　设 $T \in L(U,V)$, $S \in L(V,U)$ 为 T 的内逆. 令 $P = I - ST$, $Q = TS$. 又设 P' 与 Q' 为 U 与 V 中的线性投影, 且 $R(P') = N(T)$, $R(Q') = R(T)$. 则

$$\begin{aligned} S' &= (I + P - P')S(I - Q + Q') \\ &= (2I - ST - P')S(I - TS + Q') \end{aligned}$$

为 T 的线性内逆, 且 $I - S'T = P'$, $LS' = Q'$.

证明　设 $S \in L(V,U)$ 为 $L \in L(U,V)$ 的内逆. 令 $P = I - ST$ 且 $Q = TS$, 则 U, V 有代数直和分解

$$U = R(P) \dot{+} N(P) \ \text{且}\ V = R(Q) \dot{+} N(Q),$$

这里 $R(P)=N(T)$, $R(Q)=R(T)$.

设 $Q':V\to R(T)$ 为另一个线性投影，使 $R(Q')=R(T)$.

现求 $S'\in L(V,U)$, 使得 $TS'=Q'$ (此时， $TS'T=Q'T=T$). 为此，选 $C\in L(V,U)$ 使 $S'=S+C$ 满足

$$LS'=Q'=Q+B.$$

于是 C 满足 $LC=B$.

因为 $B=Q'-Q$ 且 $R(Q')=R(Q)=R(T)$, 从而 $R(B)\subset R(T)\subset N(B)$, 所以 $B=QB=LSB$. 因此，只须取 $C=SB$, 有

$$S'=S+C=S(I+B)=S(I-Q+Q').$$

类似地,取线性投影 P' 满足 $R(P')=N(T)$. 寻求 $S'\in L(V,U)$ 使得 $I-S'T=P'$ (此时， $T-TS'T=T(I-S'T)=TP'=\theta$).

记 $S'=S+C$, 由此导出， C 应满足 $(S+C)T=S'T=I-P'=I-P-A$. 由 $ST=I-P$, 得 $CT=-A$, 但 $A=P'-P$, 故 $R(A)\subset N(T)\subset N(A)$, 从而 $AP=\theta$. 故

$$CT=-A+AP=-A(I-P)=-AST.$$

因此，可取 $C=-AS$, 有

$$S'=S+C=S-AS=(I-A)S=(I+P-P')S.$$

于是定理得证. □

推论 2.1.6 设 $S\in L(V,U)$ 为 $T\in L(U,V)$ 的内逆，则 $S-STS$ 在线性投影改变下是不变的，即如果 $S'=(I-A)S(I+B)$, 其中 $A=P'-P$, $B=Q'-Q$, 则

$$S-STS=S'-S'TS'.$$

证明 因 $TA=\theta$ 且 $BT=\theta$, 故

$$\begin{aligned}S'TS'&=(I-A)S(I+B)T(I-A)S(I+B)\\&=(I-A)STS(I+B).\end{aligned}$$

因此 $S'-S'TS'=(I-A)(S-STS)(I+B)$. 但因 $AP=\theta$, 从而

$$(I-A)(S-STS)=(I-A)PS=PS=S-STS.$$

又因 $QB=B$, 于是

$$(S-STS)(I+B)=S(I-Q)(I+B)=S(I-Q)=S-STS.$$

因此

$$S'-S'TS'=S-STS.$$ □

定义 2.1.2 设 $T\in L(U,V)$, $S\in L(V,U)$ 满足

$$STS = S, \tag{2.1.2}$$

称为 T 的线性外逆，可简称外逆． T 的一切线性外逆的全体记为 $O(T)$.

外逆也称为半逆， 2 逆，记为 $T^{\#}$.

显然， $S \in O(T) \Leftrightarrow T \in I(S)$. 于是由定理 2.1.3 及定理 2.1.4, 我们立刻有

定理 2.1.7　设 $T \in L(U,V)$, $S \in L(V,U)$ 为 T 外逆，则

(i) ST 为 U 中线性投影， $R(ST) = R(S)$, $R(TS) \subset R(T)$, 且

$$U = R(ST) \dot{+} N(ST) = R(S) \dot{+} N(ST).$$

(ii) TS 为 V 中线性投影， $N(TS) = N(S)$, $N(T) \subset N(ST)$ 且

$$V = R(TS) \dot{+} N(TS) = R(TS) \dot{+} N(S).$$

证明　留作练习.

定理 2.1.8　设 $T \in L(U,V)$, $S \in L(V,U)$, 下述命题等价

(i) $S \in O(T)$;

(ii) ST 为幂等的且 $R(ST) = R(S)$;

(iii) ST 为幂等的且 $U = R(S) \dot{+} N(ST)$;

(iv) TS 为幂等的且 $N(TS) = N(S)$;

(v) TS 为幂等的且 $V = N(S) \dot{+} R(TS)$.

证明　由定理 2.1.4 立得.

注记　$S_1, S_2 \in I(T) \Rightarrow S_1TS_2 \in I(T) \cap O(T)$.

定义 2.1.3　设 $T \in L(U,V)$, $S \in L(V,U)$. 若 $S \in I(T) \cap O(T)$, 则 T 与 S 互相称为代数广义逆.

代数广义逆又称为 (1,2) 逆，自反偏逆，自反半逆，记为 T^{+}.

定理 2.1.9　每个线性变换 $T \in L(U,V)$ 均有代数广义逆, 特别, 如果 $M_1, M_2 \in I(T)$, 那么 $M_1TM_2 \in I(T) \cap O(T)$.

证明　由定理 2.1.1, $I(T) \neq \varnothing$. 任取 $S_1, S_2 \in I(T)$, 令 $S = S_1TS_2$, 则

$$TST = (TS_1T)S_2T = TS_2T = T,$$

$$STS = S_1(TS_2T)S_1TS_2 = S_1(TS_1T)S_2 = S_1TS_2 = S,$$

因此 $S \in I(T) \cap O(T)$, 即 S 为 T 的代数广义逆. □

2. 线性算子的内逆与外逆

设 X, Y 为 Banach 空间， $L(X,Y)$ 为从 X 到 Y 的线性算子全体构成的线性空间， $\mathscr{L}(X,Y)$ 为从 X 到 Y 的有界线性算子全体构成的 Banach 空间.

设 $T \in \mathscr{L}(X,Y)$, 算子 $S \in \mathscr{L}(Y,X)$ 满足 $TST = T$, 则称 S 为 T 的有界内逆，记为 T^{-}. 如果 $STS = S$, 则称 S 为 T 的有界外逆，记为 $T^{\#}$. 如果 S 既为 T 的有

界内逆，又为 T 的有界外逆，则称 S 为 T 的有界线性广义逆，简称为 T 的广义逆，记为 T^+.

定理 2.1.10 设 $T \in \mathscr{L}(X,Y)$,T 有有界内逆 T^- 的充分必要条件是 $N(T), R(T)$ 分别在 X, Y 中拓扑可补.

证明 必要性. 设 $T^- \in \mathscr{L}(Y,X)$ 为 T 的内逆. 由定理 2.1.4, TT^-, T^-T 分别为 Y, X 中线性投影，且

$$X = N(T) \dot{+} R(T^-T), \quad N(T) = N(T^-T);$$
$$Y = R(T) \dot{+} N(TT^-), \quad R(T) = R(TT^-).$$

由于 T 与 T^- 均为连续的，从而 TT^-,T^-T 分别为 Y, X 中连续线性投影，从而

$$X = N(T) \oplus R(T^-T),$$
$$Y = R(T) \oplus N(TT^-).$$

因此， $N(T), R(T)$ 分别在 X, Y 中拓扑可补.

充分性. 设 $N(T), R(T)$ 分别在 X, Y 中拓扑可补，则 $N(T), R(T)$ 为闭的，设 M, G 分别为 X, Y 中闭子空间，使

$$X = N(T) \oplus M\ , \quad Y = R(T) \oplus G.$$

令 $\widetilde{T} = T|_M$ ，由定理 2.1.1 的证明， $\widetilde{T} : M \to R(T)$ 为 $1-1$ 到上映射，由 Banach 逆算子定理 $\widetilde{T}^{-1} \in \mathscr{L}(R(T), M)$. 而 Q 为 Y 中沿 G 到 $R(T)$ 上的连续线性投影. 定义

$$T^- = \widetilde{T}^{-1}Q.$$

则 $T^- \in \mathscr{L}(Y,X)$ 且 $M = R(T^-)$,

$$TT^-T = T\widetilde{T}^{-1}QT = T.$$

因此 T^- 为 T 的有界内逆. □

有界外逆与有界内逆不同，即使 $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ 的零空间 $N(T)$ 与值域 $R(T)$ 在 X, Y 中非拓扑可补， T 也会存在有界外逆 $T^{\#}$, 参见 [Na1]. 由此，可以给出 X, Y 的拓扑直和分解.

定理 2.1.11 设 $T \in \mathscr{L}(X,Y)$, 如果 $T^{\#}$ 为 T 的有界外逆，则有下面的拓扑直和分解:

$$X = R(T^{\#}) \oplus N(T^{\#}T),$$
$$Y = N(T^{\#}) \oplus R(TT^{\#}).$$

证明 因为 $T^{\#}TT^{\#} = T^{\#}$, 所以 $P := T^{\#}T$, $Q := TT^{\#}$ 分别为 X, Y 中的连续线性投影，从而

$$X = R(P) \oplus N(P) = R(T^{\#}T) \oplus N(T^{\#}T),$$

$$Y = R(Q) \oplus N(Q) = R(TT^{\#}) \oplus N(TT^{\#}).$$

显然， $R(T^{\#}T) \subset R(T^{\#})$. 反之， $\forall x \in R(T^{\#})$, 存在 $y \in Y$, 满足 $x = T^{\#}y = T^{\#}TT^{\#}y = T^{\#}Tx \in R(T^{\#}T)$, 故 $R(T^{\#}) \subset R(T^{\#}T)$. 因此，有

$$X = R(T^{\#}) \oplus N(T^{\#}T).$$

同理， $N(TT^{\#}) = N(T^{\#})$, 故有

$$Y = R(TT^{\#}) \oplus N(T^{\#}).$$

□

下面证明有界外逆的稳定性.

定理 2.1.12　设 $T_0 \in \mathscr{L}(X,Y), T_0^{\#} \in \mathscr{L}(Y,X)$ 为 T_0 的有界外逆. $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ 满足 $\|T_0^{\#}(T-T_0)\| < 1$, 则

$$T^{\#} := [I + T_0^{\#}(T-T_0)]^{-1}T_0^{\#} \tag{2.1.3}$$

为 T 的有界外逆，且 $N(T^{\#}) = N(T_0^{\#}), R(T^{\#}) = R(T_0^{\#})$, 进而

$$\|T^{\#} - T_0^{\#}\| \leqslant \frac{\|T-T_0\| \cdot \|T_0^{\#}\|^2}{1 - \|T_0^{\#}(T-T_0)\|}, \tag{2.1.4}$$

且

$$\|T^{\#}T_0\| \leqslant \frac{1}{1 - \|T_0^{\#}(T-T_0)\|}.$$

证明　设 $C := I + T_0^{\#}(T-T_0)$. 因为 $\|T_0^{\#}(T-T_0)\| < 1$, 由 Banach 引理， C 有有界逆 C^{-1}:

$$C^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[T_0^{\#}(T-T_0)]^n. \tag{2.1.5}$$

因为 $T_0^{\#}T_0T_0^{\#} = T_0^{\#}$, 我们有

$$\begin{aligned} T_0^{\#}T_0C &= T_0^{\#}T_0(I + T_0^{\#}T - T_0^{\#}T_0) \\ &= T_0^{\#}T_0 + T_0^{\#}T_0T_0^{\#}T - T_0^{\#}T_0T_0^{\#}T_0 \\ &= T_0^{\#}T_0 + T_0^{\#}T - T_0^{\#}T_0 \\ &= T_0^{\#}T, \end{aligned}$$

因此

$$T_0^{\#}T_0 = T_0^{\#}TC^{-1}. \tag{2.1.6}$$

设 $T^{\#} := C^{-1}T_0^{\#}$, 则由 (2.1.6), 有

$$\begin{aligned} T^{\#}TT^{\#} &= C^{-1}T_0^{\#}TC^{-1}T_0^{\#} \\ &= C^{-1}T_0^{\#}T_0T_0^{\#} \\ &= C^{-1}T_0^{\#} \\ &= T^{\#}, \end{aligned}$$

从而 $T^{\#}$ 为 T 的有界外逆，且显然

$$N(T^{\#})=N(T_0^{\#}).$$

下面证 $R(T^{\#})=R(T_0^{\#})$. 任取 $x\in R(T_0^{\#})$, 则存在 $y\in Y$, 使 $x=T_0^{\#}y=T_0^{\#}T_0T_0^{\#}y=T_0^{\#}T_0x$, 于是 $T^{\#}Tx=C^{-1}T_0^{\#}Tx=C^{-1}T_0^{\#}TT_0^{\#}T_0x$. 但 $CT_0^{\#}=[I+T_0^{\#}(T-T_0)]T_0^{\#}=T_0^{\#}TT_0^{\#}$, 所以 $T_0^{\#}=C^{-1}T_0^{\#}TT_0^{\#}$. 因此

$$T^{\#}Tx=C^{-1}T_0^{\#}TT_0^{\#}T_0x=T_0^{\#}T_0x=x,$$

于是 $x\in R(T^{\#})$, 从而 $R(T_0^{\#})\subset R(T^{\#})$.

令 $\widetilde{C}=I+T^{\#}(T_0-T)$, 则由 $T^{\#}=C^{-1}T_0^{\#}$, 有

$$\begin{aligned}C\widetilde{C}&=C[I+C^{-1}T_0^{\#}(T_0-T)]\\&=C+T_0^{\#}(T_0-T)\\&=I+T_0^{\#}(T-T_0)+T_0^{\#}(T_0-T)\\&=I.\end{aligned}$$

因为 C^{-1} 存在，所以 $\widetilde{C}=C^{-1}$ 且 $\widetilde{C}^{-1}=C$. 这证明了由 $T^{\#}TT^{\#}=T^{\#}$, 可得 $T_0^{\#}T_0T_0^{\#}=T_0^{\#}$ 且

$$R(T^{\#})\subset R(T_0^{\#}),$$

因此

$$R(T^{\#})=R(T_0^{\#}).$$

由 $T^{\#}=C^{-1}T_0^{\#}=\widetilde{C}T_0^{\#}=[I+T^{\#}(T_0-T)]T_0^{\#}$, 得

$$\begin{aligned}\|T^{\#}-T_0^{\#}\|&=\|T^{\#}(T_0-T)T_0^{\#}\|\\&=\|C^{-1}T_0^{\#}(T_0-T)T_0^{\#}\|\\&\leqslant\|C^{-1}\|\|T_0-T\|\|T_0^{\#}\|^2\\&\leqslant\frac{\|T_0-T\|\cdot\|T_0^{\#}\|^2}{1-\|T_0^{\#}(T_0-T)\|}.\end{aligned}$$

最后，由于 $T^{\#}=C^{-1}T_0^{\#}$, 我们有

$$\begin{aligned}\|T^{\#}T_0\|&=\sup\{\|C^{-1}T_0^{\#}T_0x\|:x\in X,\|x\|=1\}\\&=\sup\{\|C^{-1}T_0^{\#}T_0x\|:x\in R(T_0^{\#}T_0),\|x\|=1\}\\&=\sup\{\|C^{-1}x\|:x\in R(T_0^{\#}T_0),\|x\|=1\}\\&\leqslant\sup\{\|C^{-1}x\|:x\in X,\|x\|=1\}\\&=\|C^{-1}\|\\&\leqslant\frac{1}{1-\|T_0^{\#}(T_0-T)\|}.\end{aligned}$$

□

注记 1　$T_0 \in \mathscr{L}(X,Y)$, $T_0^+ \in \mathscr{L}(Y,X)$ 为 T_0 的广义逆. 则 T_0^+ 关于 T_0 的非稳定性只依赖于关系式 $T_0T_0^+T_0 = T_0$.

注记 2　有界内逆是非稳定的. 事实上, 如果 X,Y 为 Banach 空间, T 为从 X 到 Y 的, 具有闭值域 $R(T)$ 的闭线性算子, $N(T)$ 为 T 的零空间. 如果 $N(T)$ 的维数、$R(T)$ 的余维数均为无穷, 则总存在无穷秩的紧算子 K, 无论 $\|K\|$ 如何小, 算子 $T+K$ 具有非闭的值域 $R(T+K)$(见 [Na1]). 因此, 算子 T 具有有界内逆, 而无论 K 的范数如何小, 扰动算子 $T+K$ 无有界内逆 (否则, 由定理 2.1.4, $R(T+K)$ 为闭子空间).

注记 3　在 Banach 空间 $\mathscr{L}(X,Y)$ 中, 具有有界外逆的有界线性算子的集合, 在算子范数拓扑下为开集.

3. 有界外逆在拟牛顿迭代方法中的应用

Banach 空间中有界线性算子的有界外逆在具有奇异 Fréchet 导数的非线性算子方程的迭代法 (Newton 法、拟 Newton 法) 中具有重要应用.

设 $B(x_0,r)$ 为 X 中以 x_0 为中心, $r>0$ 为半径的开球, $\overline{B}(x_0,r)$ 为相应的闭球.

定理 2.1.13　设 $F: D\subset X \to Y$ 为 Fréchet 可微的. $T(x) \in \mathscr{L}(X,Y)$ 为 $F'(x)$ 的逼近. 假定存在 D 的一个开凸子集 D_0, $x_0 \in D_0, T = T(x_0)$ 的一个有界外逆 $T^{\#}$, 及常数 $\eta, K>0, M, L, \mu, l \geqslant 0$ 满足: $\forall x,y \in D_0$, 下列条件成立:

$$\|T^{\#}F(x_0)\| \leqslant \eta, \tag{2.1.7}$$

$$\|T^{\#}(F'(x)-F'(y))\| \leqslant K\|x-y\|, \tag{2.1.8}$$

$$\|T^{\#}(F'(x)-T(x))\| \leqslant M\|x-x_0\|+\mu, \tag{2.1.9}$$

$$\|T^{\#}(T(x)-T)\| \leqslant L\|x-x_0\|+l, \tag{2.1.10}$$

$$b := \mu + l < 1. \tag{2.1.11}$$

进而假定

$$h := \sigma\eta \leqslant \frac{1}{2}(1-b)^2, \tag{2.1.12}$$

这里 $\sigma := \max(K, M+L)$, 且

$$\bar{B}(x_0, t^*) \subset D_0, \tag{2.1.13}$$

这里 $t^* = \left[1-b-\sqrt{(1-b)^2-2h}\right]/\sigma$. 则

(i) 由拟 Newton 迭代法,

$$x_{k+1} = x_k - T(x_k)^{\#}F(x_k),$$

$$\because \quad T(x_k)^{\#} = (I+T^{\#}(T(x_k)-T))^{-1}T^{\#},$$

所定义的序列 $\{x_k\} \subset \overline{B}$, 且 $x_k \to x^* \in \overline{B}, (k \to \infty), T^{\#}F(x^*) = \theta$.

(ii) $T^{\#}F(x) = \theta$ 在 $\overline{B} \cap \{R(T^{\#}) + x_0\}$ 中的解唯一，这里

$$\overline{B} = \begin{cases} \overline{B}(x_0, t^*) \cap D_0, & h = \dfrac{1}{2}(1-b)^2, \\ \overline{B}(x_0, t^{**}) \cap D_0, & h < \dfrac{1}{2}(1-b)^2, \end{cases}$$

且

$$t^{**} = \left[1 - b + \sqrt{(1-b)^2 - 2h}\right]/\sigma.$$

证明 设 $f(t) := \dfrac{\sigma}{2}t^2 - (1-b)t + \eta$ 且 $g(t) := 1 - Lt - l$. 定义数列 $\{t_k\}$ 为

$$t_0 = 0, \ t_{k+1} = t_k + \frac{f(t_k)}{g(t_k)}, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

由条件 $2\sigma\eta \leqslant (1-b)^2$ 可知， $f(t)$ 具有两个正根 t^* 与 $t^{**}, t^* \leqslant t^{**}$. 由条件 $t_0 = 0, t_k \leqslant t_{k+1}$, 有

$$t_k \to t^*, \quad k \to \infty.$$

(i) 首先对 k 用数学归纳法证明:

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leqslant t_{k+1} - t_k, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{2.1.14}$$

当 $k = 0$ 时，由 (2.1.7) 式，有

$$\|x_1 - x_0\| = \| - T^{\#}F(x_0)\| \leqslant \eta \leqslant t_1 - t_0,$$

故 (2.1.14) 对 $k = 0$ 为真.

由 (2.1.10) 式，有

$$\begin{aligned} \|T^{\#}(T(x_1) - T)\| &\leqslant L\|x_1 - x_0\| + l \\ &\leqslant Lt_1 + l \leqslant Lt^* + l < 1. \end{aligned}$$

由定理 2.1.12, 有

$$T(x_1)^{\#} = [I + T^{\#}(T(x_1) - T)]^{-1}T^{\#}$$

为 $T(x_1)$ 的有界外逆，且

$$\begin{aligned} \|T(x_1)^{\#}T\| &\leqslant \frac{1}{1 - \|T^{\#}(T(x_1) - T)\|} \\ &\leqslant \frac{1}{1 - Lt_1 - l}, \end{aligned}$$

$$N(T(x_1)^{\#}) = N(T^{\#}).$$

假设对 $1 \leqslant j \leqslant k$, 有

$$\|x_j - x_{j-1}\| \leqslant t_j - t_{j-1},$$

且 $N(T(x_{k-1})^{\#}) = N(T^{\#})$ 与 $\|T(x_k)^{\#}T\| \leqslant \dfrac{1}{1 - Lt_k - l}$, 于是

$$\|x_k - x_0\| \leqslant t_k - t_0 = t_k,$$

且

$$N(T(x_k)^{\#}) = N(T(x_{k-1})^{\#}) = N(T^{\#}). \tag{2.1.15}$$

再由定理 2.1.8, $I - T(x_{k-1})T(x_{k-1})^{\#}$ 为从 Y 到 $N(T(x_{k-1})^{\#})$ 上的线性投影，从而由 (2.1.15), 有

$$T(x_k)^{\#}[I - T(x_{k-1})T(x_{k-1})^{\#}] = \theta,$$

于是

$$\begin{aligned}
& x_{k+1} - x_k \\
= & -T(x_k)^{\#}F(x_k) \\
= & -T(x_k)^{\#}[F(x_k) - T(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\
& -T(x_{k-1})T(x_{k-1})^{\#}F(x_{k-1})] \\
= & -T(x_k)^{\#}[F(x_k) - F(x_{k-1}) - T(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})] \\
= & -T(x_k)^{\#}\Big\{\int_0^1 [F'(x_k + t(x_{k-1} - x_k)) - F'(x_{k-1})](x_k - x_{k-1})dt \\
& + [F'(x_{k-1}) - T(x_{k-1})](x_k - x_{k-1})\Big\}.
\end{aligned}$$

由于 $N(T(x_k)^{\#}) = N(T^{\#})$, 故有

$$T(x_k)^{\#}(I - TT^{\#}) = 0,$$

亦即

$$T(x_k)^{\#} = T(x_k)^{\#}TT^{\#}.$$

再由 $T^{\#}$ 的连续线性，有下面估计式:

$$\begin{aligned}
& \|x_{k+1} - x_k\| \\
\leqslant & \|T(x_k)^{\#}T\|\Big\{\int_0^1 \|T^{\#}[F'(x_k + t(x_{k-1} - x_k)) - F'(x_{k-1})]\|dt \\
& + \|T^{\#}[F'(x_{k-1}) - T(x_{k-1})]\|\Big\}\|x_k - x_{k-1}\| \\
\leqslant & \frac{1}{1 - Lt_k - l}\Big\{\frac{K}{2}\|x_k - x_{k-1}\|^2 + [M\|x_{k-1} - x_0\| + \mu]\|x_k - x_{k-1}\|\Big\} \\
\leqslant & \frac{1}{g(t_k)}\Big\{\frac{\sigma}{2}(t_k - t_{k-1})^2 + [Mt_{k-1} + \mu](t_k - t_{k-1})\Big\} \\
= & \frac{1}{g(t_k)}\Big\{\frac{\sigma}{2}(t_k - t_{k-1})^2 + M(t_k - t_{k-1})t_{k-1} + \mu(t_k - t_{k-1}) \\
& - g(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}) + f(t_{k-1})\Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{g(t_k)}\Big\{\frac{\sigma}{2}t_k^2 - \sigma t_k t_{k-1} + \frac{\sigma}{2}t_{k-1}^2 + M(t_k - t_{k-1})t_{k-1} + \mu t_k - \mu t_{k-1} \\
&\quad - (1 - Lt_{k-1} - l)(t_k - t_{k-1}) + \frac{\sigma}{2}t_{k-1}^2 - (1-\mu-l)t_{k-1} + \eta\Big\}. \\
&= \frac{1}{g(t_k)}\Big\{\frac{\sigma}{2}t_k^2 - (1-\mu-l)t_k + \eta - (\sigma - M - L)t_{k-1}(t_k - t_{k-1})\Big\} \\
&\leqslant \frac{f(t_k)}{g(t_k)} = t_{k+1} - t_k.
\end{aligned}$$

这完成了归纳证明，即 (2.1.14) 为真．于是对任何 $k \geqslant 1$, 有

$$\begin{gathered}
\|x_{k+1} - x_k\| \leqslant t_{k+1} - t_k, \\
\|T^{\#}[T(x_{k+1}) - T]\| \leqslant L\|x_{k+1} - x_0\| + l \leqslant Lt_{k+1} + l \leqslant Lt^* + l < 1, \\
\|x_k - x_0\| \leqslant t_k \leqslant t^*.
\end{gathered}$$

由定理 2.1.12, 知

$$T(x_{k+1})^{\#} := [I + T^{\#}(T(x_{k+1}) - T)]^{-1}T^{\#}$$

为 $T(x_{k+1})$ 的有界外逆．由此可知 $x_k \in \bar{B}$ $(k \geqslant 0)$, 且

$$x_k \to x^* \ \in \ \bar{B} \quad (k \to \infty).$$

由

$$T(x_{k-1})^{\#} = [I + T^{\#}(T(x_{k-1}) - T)]^{-1}T^{\#}$$

及

$$x_k - x_{k-1} = -T(x_{k-1})^{\#}F(x_{k-1}),$$

可得

$$\begin{aligned}
&[I + T^{\#}(T(x_{k-1}) - T)](x_k - x_{k-1}) \\
=\ & -[I + T^{\#}(T(x_{k-1}) - T)]T(x_{k-1})^{\#}F(x_{k-1}) \\
=\ & -T^{\#}F(x_{k-1}).
\end{aligned}$$

令 $k \to \infty$, 得

$$T^{\#}F(x^*) = \theta.$$

(ii) 由定理 2.1.12, 对任意 $k \geqslant 0$, $R(T(x_k)^{\#}) = R(T^{\#})$. 于是

$$x_{k+1} - x_k = -T(x_k)^{\#}F(x_k) \in R(T(x_k)^{\#}) = R(T^{\#}).$$

再由定理 2.1.11, $R(T^{\#}) = R(T^{\#}T)$, 从而 $x_{k+1} \in x_k + R(T^{\#}) = x_k + R(T^{\#}T)$, 于是对任意 $k \geqslant 0$, 有

$$x_k \in x_0 + R(T^{\#}) = x_0 + R(T^{\#}T).$$

因此

$$x^* \in \bar{B} \cap \{x_0 + R(T^{\#})\}.$$

如果 $\widetilde{x}^* \in \bar{B} \cap \{x_0 + R(T^\#)\}$ 为 $T^\# F(x) = 0$ 的另一个解，则

$$\widetilde{x}^* - x^* \in R(T^\#) = R(T^\# T),$$

而且

$$\begin{aligned} T^\# T(\widetilde{x}^* - x_k) &= T^\# T(\widetilde{x}^* - x_0) + T^\# T(x_0 - x_k) \\ &= \widetilde{x}^* - x_k \quad (k \geqslant 0). \end{aligned}$$

因此，有

$$\begin{aligned} \|\widetilde{x}^* - x_1\| &= \|\widetilde{x}^* - x_0 + T^\# F(x_0) - T^\# F(\widetilde{x}^*)\| \\ &\leqslant \int_0^1 \|T^\#[F'(\widetilde{x}^* + t(x_0 - \widetilde{x}^*)) - F'(x_0)]\| dt \|\widetilde{x}^* - x_0\| \\ &\quad + \|T^\#(F'(x_0) - T)\| \|\widetilde{x}^* - x_0\| \qquad (\text{由}(2.1.8)\text{与}(2.1.9)) \\ &\leqslant \left(\frac{\sigma}{2}\|\widetilde{x}^* - x_0\| + l + \mu\right) \|\widetilde{x}^* - x_0\| =: q(v), \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

这里 $v := \|\widetilde{x}^* - x_0\|$. 由

$$\|\widetilde{x}^* - x_0\| \leqslant \|\widetilde{x}^* - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leqslant q(v) + \eta,$$

有

$$v \leqslant \frac{\sigma}{2} v^2 + (l + \mu) v + \eta = \frac{\sigma}{2} v^2 + bv + \eta,$$

从而

$$f(v) = \frac{\sigma}{2} v^2 + (b-1)v + \eta \geqslant 0.$$

由 t^* 的定义，有 $\widetilde{x}^* \in \bar{S}(x_0, t^*)$.

现用数学归纳法证明

$$\|\widetilde{x}^* - x_k\| \leqslant t^* - t_k, \quad k \geqslant 0. \tag{2.1.17}$$

因为 $\widetilde{x}^* \in S(x_0, t^*)$, 知 (2.1.17) 对 $k = 0$ 成立. 设 $\|\widetilde{x}^* - x_k\| \leqslant t^* - t_k$ $(k \geqslant 0)$, 则由 $N(T(x_k)^\#) = N(T^\#)$ 及 $T^\# F(\widetilde{x}^*) = \theta$, 有

$$\begin{aligned} \|\widetilde{x}^* - x_{k+1}\| &= \|\widetilde{x}^* - x_k + T(x_k)^\# F(x_k) - T(x_k)^\# F(\widetilde{x}^*)\| \\ &= \|T(x_k)^\#(T(x_k)(\widetilde{x}^* - x_k) + F(x_k) - F(\widetilde{x}^*))\|, \end{aligned}$$

这里 $\widetilde{x}^* - x_k \in R(T^\#) = R(T(x_k)^\#)$ 蕴涵 $T(x_k)^\# T(x_k)(\widetilde{x}^* - x_k) = \widetilde{x}^* - x_k$. 另一方面， $N(T(x_k)^\#) = N(T^\#)$ 蕴涵 $T(x_k)^\#(I - TT^\#) = \theta$, 从而由 (2.1.8) 与 (2.1.9), 我们有

$$
\begin{aligned}
&\|\widetilde{x}^* - x_{k+1}\| \\
\leqslant\ & \|T(x_k)^\# T\| \left[\int_0^1 \|T^\#[F'(x_k + t(\widetilde{x}^* - x_k)) - F'(x_k)]\| dt \|\widetilde{x}^* - x_k\| \right. \\
&\left. + \|T^\#[F'(x_k) - T(x_k)]\| \|\widetilde{x}^* - x_k\| \right] \\
\leqslant\ & \frac{1}{1 - Lt_k - l} \left[\frac{K}{2} \|\widetilde{x}^* - x_k\|^2 + (M\|x_k - x_0\| + \mu) \|\widetilde{x}^* - x_k\| \right] \\
\leqslant\ & \frac{1}{g(t_k)} \left[\frac{\sigma}{2}(t^* - t_k)^2 + (Mt_k + \mu)(t^* - t_k) \right] \\
=\ & \frac{1}{g(t_k)} \left[\frac{\sigma}{2} t^{*2} + \mu t^* - (\sigma - M)t_k(t^* - t_k) - \frac{\sigma}{2} t_k^2 - \mu t_k \right] \\
=\ & \frac{1}{g(t_k)} \left[t^* - \eta - lt^* - (\sigma - M)t_k(t^* - t_k) - \frac{\sigma}{2} t_k^2 - \mu t_k \right] \\
=\ & t^* - t_k + \frac{1}{g(t_k)} \left[-(t^* - t_k)g(t_k) + t^* - \eta - lt^* - \frac{\sigma}{2} t_k^2 \right. \\
&\left. - \mu t_k - (\sigma - M)t_k(t^* - t_k) \right] \\
=\ & t^* - t_k - \frac{1}{g(t_k)} \left[\frac{\sigma}{2} t_k^2 - (1 - \mu - l)t_k + \eta + (\sigma - M - L)t_k(t^* - t_k) \right] \\
=\ & t^* - t_k - \frac{1}{g(t_k)} [f(t_k) + (\sigma - M - L)t_k(t^* - t_k)] \\
\leqslant\ & t^* - \left(t_k + \frac{f(t_k)}{g(t_k)} \right) \\
=\ & t^* - t_{k+1}.
\end{aligned}
$$

于是 (2.1.7) 对 $k \geqslant 0$ 为真. 故 $x_k \to \widetilde{x}^*$ $(k \to \infty)$. 由极限的唯一性, 有 $x^* = \widetilde{x}^*$. □

推论 2.1.14 使用外逆的牛顿迭代序列为

$$x_{k+1} = x_k - F'(x_k)^\# F(x_k) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

设 $T(x_k) = F'(x_k)$ 且定理 2.1.13 的条件被满足, 则 $\{x_k\}$ 收敛于 x^*, $x^* \in \bar{S} \cap \{R(F'(x_0)^\#) + x_0)\}$ 且

$$F'(x_0)^\# F(x^*) = 0. \tag{2.1.18}$$

证明 由定理 2.1.13 及 $T(x) = F'(x)$ 直接推出. □

§2.2 线性斜投影广义逆 $T_{P,Q}^+$ 的定义与性质

1. 线性变换的代数广义逆

设 V, U 为线性空间, $T \in L(V, U)$ 为从 V 到 U 的线性变换. 由定理 2.1.9, 总存在 T 的代数广义逆 $T^+ \in L(U, V)$ 满足 $TT^+T = T$, $T^+TT^+ = T^+$.

设 $N(T)\subset V$、$R(T)\subset U$ 分别为 T 的零空间与值域，则存在 V,U 中线性投影算子 P,Q 满足

$$R(P)=N(T) \text{ 且 } R(Q)=R(T).$$

但 P,Q 并不唯一.

定理 2.2.1 设 V,U 为线性空间，$T\in L(V,U)$ 为从 V 到 U 上的线性变换，则有下述命题:

(1) 若 $T^+\in L(U,V)$ 为 T 的代数广义逆，则存在 $P\in L(V),Q\in L(U)$ 分别为 V 到 $N(T)$ 上，U 到 $R(T)$ 上的线性投影，满足

$$\begin{cases} TT^+T=T, & (2.2.1)\\ T^+TT^+=T^+, & (2.2.2)\\ T^+T=I-P, & (2.2.3)\\ TT^+=Q. & (2.2.4)\end{cases}$$

(2) 若 $P\in L(V),Q\in L(U)$ 分别为 V 到 $N(T)$,U 到 $R(T)$ 上线性投影，则唯一存在 $T^+\in L(U,V)$ 满足 (2.2.1)~(2.2.4). 此时记

$$T^+=T^+_{P,Q},$$

$T^+=T^+_{P,Q}$ 为 T 的代数广义逆.

(3) 如果 P',Q' 分别为 V 到 $N(T)$ 上，U 到 $R(T)$ 上的任意线性投影，则

$$\begin{aligned} T^+_{P',Q'}&=(I+P-P')T^+_{P,Q}(I-Q+Q')\\ &=(I-P')T^+_{P,Q}Q'. \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

证明 (1) 因 $T^+\in L(U,V)$ 为 T 的代数广义逆. 由定义 2.1.3, 知 (2.2.1) 与 (2.2.2) 成立. 由于 T^+ 为 T 的线性内逆，令 $P=I-T^+T,Q=TT^+$. 由定理 2.1.5, P,Q 分别为 V 到 $N(T)$ 上，U 到 $R(T)$ 上的线性投影，且 (2.2.3) 与 (2.2.4) 为真.

(2) 设 $P\in L(V),Q\in L(U)$ 分别为 V 到 $N(T)$ 上，U 到 $R(T)$ 上的线性投影，则

$$V=N(T)\dot{+}N(P),\quad U=R(T)\dot{+}N(Q).$$

令 $\widetilde{T}=T|_{N(P)}$, 则 $\widetilde{T}:N(P)\to R(T)$ 为一对一且到上的映射. 定义

$$T^+_{P,Q}=\widetilde{T}^{-1}Q,$$

则

$$\begin{aligned} &TT^+_{P,Q}T=T,\\ &T^+_{P,Q}TT^+_{P,Q}=T^+_{P,Q},\\ &TT^+_{P,Q}=T\widetilde{T}^{-1}Q=Q. \end{aligned}$$

由 $R(\widetilde{T}^{-1}) = N(P)$, 有

$$\begin{aligned}T_{P,Q}^+T =&\widetilde{T}^{-1}T = [P+(I-P)]\widetilde{T}^{-1}T\\ =&(I-P)\widetilde{T}^{-1}T = I-P.\end{aligned}$$

因此 $T^+ = T_{P,Q}^+$ 满足 (2.2.1)~(2.2.4). $T_{P,Q}^+$ 的唯一性可由 (2.2.5) 推出.

(3) 设 $P';Q'$ 分别为 V 到 $N(T)$ 上, U 到 $R(T)$ 上的任意线性投影, 由 (2) 的存在性, 有 $T_{P',Q'}^+$ 满足 (2.2.1)~(2.2.4). 由定理 2.1.5, 有

$$T_{P',Q'}^+ = (I+P-P')T_{P,Q}^+(I-Q+Q').$$

再由定理 2.1.8, $R(T_{P,Q}^+) = R(T_{P,Q}^+T) = R(I-P) = N(P)$, 且 $N(T_{P,Q}^+) = N(TT_{P,Q}^+) = N(Q) = R(I-Q)$, 于是

$$\begin{aligned}T_{P',Q'}^+ &= (I+P-P')T_{P,Q}^+(I-Q+Q')\\ &= (I-P')T_{P,Q}^+Q'.\end{aligned}$$

□

2. Banach 空间中线性算子的线性斜投影广义逆

设 X,Y 为 Banach 空间, $T\in\mathscr{L}(X,Y)$ 连续线性算子. $T^+\in\mathscr{L}(Y,X)$ 称为 T 的广义逆, 是指 $TT^+T=T$, $T^+TT^+=T^+$.

定理 2.2.2 设 X,Y 为 Banach 空间, $T\in\mathscr{L}(X,Y)$ 为从 X 到 Y 的连续线性算子.

(1) 若 $T^+\in\mathscr{L}(Y,X)$ 为 T 的广义逆. 则 $N(T),R(T)$ 分别在 X,Y 中拓扑可补, 且存在 X 到 $N(T)$ 上的有界线性投影 P, Y 到 $R(T)$ 上的有界线性投影 Q, 满足

$$\begin{cases} TT^+T=T, & (2.2.6)\\ T^+TT^+=T^+, & (2.2.7)\\ T^+T=I-P, & (2.2.8)\\ TT^+=Q. & (2.2.9)\end{cases}$$

(2) 设 $N(T),R(T)$ 分别在 X,Y 中拓扑可补, $P:X\to N(T)$, $Q:Y\to R(T)$ 为对应的有界线性投影, 则唯一存在 $T^+\in\mathscr{L}(Y,X)$ 满足 (2.2.6)~(2.2.9). 此时记

$$T^+ = T_{P,Q}^+,$$

$T_{P,Q}^+$ 称为 T 的线性斜投影广义逆, 简称为 T 的线性投影广义逆.

(3) 设 $N(T),R(T)$ 分别在 X,Y 中拓扑可补, $P':X\to N(T)$, $Q':Y\to R(T)$ 为任意对应的有界线性投影, 则

$$T_{P',Q'}^+ = (I+P-P')T_{P,Q}^+(I-Q+Q')$$

$$= (I - P')T^+_{P,Q}Q'.$$

证明　类似定理 2.2.1 可证. □

下面给出线性斜投影广义逆的一般定义:

定义 2.2.1　设 $T \in L(X,Y), \overline{N(T)}, \overline{R(T)}$ 分别在 X, Y 中拓扑可补, $P = P_{\overline{N(T)}}, Q = Q_{\overline{R(T)}}$ 为 X 到 $\overline{N(T)}$ 上, Y 到 $\overline{R(T)}$ 的有界线性投影. 如果 $T^+ \in L(Y,X)$ 满足

(1) $TT^+T = T$, 　　在 $D(T)$ 上;

(2) $T^+TT^+ = T^+$, 　　在 $D(T^+)$ 上;

(3) $T^+T = I_{D(T)} - P_{\overline{N(T)}}$, 　　在 $D(T)$ 上;

(4) $TT^+ = Q_{\overline{R(T)}}$, 　　在 $D(T^+)$ 上,

则称 T^+ 为 T 的线性斜投影广义逆. 记为

$$T^+ = T^+_{P,Q},$$

亦称为 T 的关于 P, Q 的广义逆.

定理 2.2.3　设 $T \in L(X,Y)$, 存在 T 的线性斜投影广义逆 $T^+ \in L(Y,X)$ 当且仅当存在 X 到 $\overline{N(T)}$ 上, Y 到 $\overline{R(T)}$ 上的连续线性投影 P, Q, 满足

$$D(T) = N(T) \dot{+} C_p(T), \tag{2.2.10}$$

其中 $C_p(T) = N(P) \cap D(T)$, 且存在 Y 的线性子空间 D_+ 满足

$$R(T) \subset D_+ \subset R(T) \dot{+} N(Q). \tag{2.2.11}$$

证明　必要性. 设存在 T 的线性斜投影广义逆 $T^+ \in L(Y,X)$, 由定义 2.2.1, 存在 $P = P_{\overline{N(T)}}, Q = Q_{\overline{R(T)}}$ 分别为 X, Y 到 $\overline{N(T)}, \overline{R(T)}$ 上的连续线性投影, 满足 (1)~(4).

对于任意 $x \in D(T)$, 由定义 2.2.1 的 (1) 有 $TT^+Tx = Tx$, 从而 $T^+Tx \in D(T)$. 再由定义 2.2.1 中 (3), 有

$$\begin{aligned} Px &= P_{\overline{N(T)}}x \\ &= x - T^+Tx \in D(T), \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} TPx &= T(x - T^+Tx) \\ &= Tx - TT^+Tx \\ &= \theta, \end{aligned}$$

于是 $Px = P_{\overline{N(T)}}x \in N(T) \subset D(T)$. 因此, 由 $x - Px \in N(P) \cap D(T) = C_P(T)$, 有

$$x = Px + (x - Px) \in N(T) + C_P(T).$$

另一方面， $N(T) \cap C_P(T) = \{\theta\}$, 从而由 $P : D(T) \to N(T)$ 连续，有

$$D(T) = N(T) \dot{+} C_P(T).$$

令 $D_+ = D(T^+)$, 则 D_+ 为 Y 的子空间，且对任意 $y \in R(T)$, 存在 $x \in D(T)$, 使 $y = Tx$, 从而由定义 2.2.1 中 (3) 有 $y \in D(T^+)$, 且

$$T^+y = x - P_{\overline{N(T)}}x.$$

因此， $R(T) \subset D(T^+)$. 又对任意 $y \in D_+ = D(T^+)$, 有 $Qy = Q_{\overline{R(T)}}y = TT^+y \in R(T)$, 从而

$$y = Qy + (y - Qy) \in R(T) \dot{+} N(Q).$$

因此，由 Q 从 $R(T) \dot{+} N(Q)$ 到 $R(T)$ 的连续性，知

$$R(T) \subset D_+ \subset R(T) \dot{+} N(Q).$$

充分性. 设存在 X 到 $\overline{N(T)}$ 上， Y 到 $\overline{R(T)}$ 的有界线性投影 $P = P_{\overline{N(T)}}$ 及 $Q = Q_{\overline{R(T)}}$ 及 Y 的线性子空间 D_+ 满足 (2.1.10) 、 (2.1.11).

令 $D(T^+) = D_+$, 则对任意 $y \in D(T^+)$ 有唯一分解式

$$y = y_1 + y_2, \quad y_1 \in R(T), y_2 \in N(Q),$$

于是 $Qy = y_1 \in R(T)$. 令 $\widetilde{T}$ 为 T 在 $C_P(T)$ 上的限制，则 $\widetilde{T}$ 为从 $C_P(T)$ 到 $R(T)$ 上的一对一算子. 定义

$$T^+y = \widetilde{T}^{-1}Qy,$$

则 T^+ 满足定义 2.2.1 中 (1)~(4). 因此 $T^+ = T^+_{P,Q}$ 为 T 的线性斜投影广义逆. □

定理 2.2.4 设 $T \in L(X, Y)$, 存在 $P \in L(X), Q \in L(Y)$ 分别为 X 到 $\overline{N(T)}$ 上， Y 到 $\overline{R(T)}$ 上有界线性投影，满足 (2.2.10)~(2.2.11). 且 $\overline{C_P(T)} = N(P)$, 则

(i) T 的线性斜投影广义逆 T^+ 存在;

(ii) T 可以延拓为具有闭的零空间的稠定线性算子 $\hat{T}$, 使 T^+ 仍为 $\hat{T}$ 的线性斜投影广义逆.

证明 (i) 由定理 2.2.3 推出.

(ii) 令

$$D(\hat{T}) = \overline{N(T)} \dot{+} C_P(T).$$

由 $\overline{C_P(T)} = N(P)$, 且 $X = \overline{N(T)} \oplus N(P)$ 知 $\overline{D(\hat{T})} = X$.

定义 $\hat{T} : D(\hat{T}) \to R(T)$ 为 $\hat{T}x = \hat{T}(Px + x_1) = Tx_1$, 其中 $x_1 = (I - P)x = T^+Tx \in C_P(T)$, 于是 $N(\hat{T}) = \overline{N(T)}$,

$$\begin{aligned}\hat{T}T^+\hat{T}x &= \hat{T}T^+\hat{T}(Px + x_1) \\ &= \hat{T}T^+Tx_1 \\ &= \hat{T}x_1 \\ &= \hat{T}(Px + x_1),\end{aligned}$$

即 $\hat{T}T^+\hat{T}=\hat{T}$, 在 $D(\hat{T})$ 上. 对 $y\in D(T^+)$, 有 $T^+y\in C_P(T)$,

$$T^+\hat{T}T^+y=T^+TT^+y=T^+y,$$

即 $T^+\hat{T}T^+=T^+$, 在 $D(T^+)$ 上.

$$\begin{aligned}T^+\hat{T}x&=T^+\hat{T}(Px+x_1)\\&=T^+Tx_1=x_1=(I-P)x.\end{aligned}$$

$$T^+\hat{T}=I-P,\quad \text{在}D(\hat{T})\text{上}.$$

又对 $y\in D(T^+)$, 由于 $T^+y\in C_P(T)$, 有

$$\hat{T}T^+y=TT^+y=Qy,$$

即

$$\hat{T}T^+=Q\quad \text{在}D(T^+)\text{上}.$$ □

推论 2.2.5 (a) 设 $T\in L(X,Y)$ 为定义在 X 上的有界线性算子或者为稠定闭线性算子, $\overline{D(T)}=X$. 假设 $N(T)$ 在 X 中拓扑可补, $X=N(T)\oplus M$; $\overline{R(T)}$ 在 Y 中拓扑可补, $Y=\overline{R(T)}\oplus G$;$M,G$ 分别为 X,Y 中闭子空间. P,Q 分别为 X 到 $N(T)$ 上, Y 到 $\overline{R(T)}$ 上的有界线性投影. 则 T 有唯一的线性斜投影广义逆 $T^+=T^+_{P,Q}$ 满足

$$\begin{cases}D(T^+)=R(T)\dot{+}N(Q);\\ \text{(i) } TT^+T=T, & \text{在 } D(T)\text{上};\\ \text{(ii) } T^+TT^+=T^+, & \text{在 } D(T^+)\text{上};\\ \text{(iii) } T^+T=I_{D(T)}-P, & \text{在 } D(T)\text{上};\\ \text{(iv) } TT^+=Q, & \text{在 } D(T^+)\text{上}.\end{cases}$$

(b) 在 (a) 的假设下, T^+ 为有界的当且仅当 $R(T)$ 为闭子空间.

证明 (a) 由条件, 有

$$D(T)=N(T)\oplus C_P(T),$$

这里 $C_P(T)=M\cap D(T)=N(P)\cap D(T)$. 令 $D_+=R(T)\oplus N(Q)$, 由定理 2.2.3, 存在 $T^+=T^+_{P,Q}$ 满足 (i)~(iv).

(b) 直接可证: $T^+=(T|_M)^{-1}Q$, 而由闭图像定理, $(T|_M)^{-1}$ 为连续的当且仅当 T 的值域 $R(T)$ 为闭的. 因此 $T^+=(T|_M)^{-1}Q$ 为连续的当且仅当 $R(T)$ 为闭的, 此时 $D(T^+)=R(T)\oplus N(Q)=Y$ 且 $TT^+=Q$ 在 Y 上成立. □

3. Hilbert 空间中稠定闭线性算子的 Moore-Penrose 广义逆

当 X,Y 均为 Hilbert 空间，$T:X\to Y$ 为 X 上有界线性算子，或稠定闭线性算子，$\overline{D(T)}=X$. 此时，T 的零空间 $N(T)$ 为闭的. 闭子空间 $N(T),\overline{R(T)}$ 分别在 X,Y 中拓扑可补，因此推论 2.2.5 的条件满足. 特别，可取 $M=N(T)^\perp, G=R(T)^\perp$，此时对应的线性投影 P,Q 为 X,Y 中正交投影算子. 此时，线性投影广义逆 T^+ 对应下述分解：

$$\begin{cases} X=\overline{D(T)} & = & N(T)\oplus N(T)^\perp & = & N(T)\oplus\overline{R(T^*)}, \\ \quad Y & = & \overline{R(T)}\oplus R(T)^\perp & = & \overline{R(T)}\oplus N(T^*). \end{cases}$$

此广义逆 T^+ 称为正交投影广义逆，简称正交广义逆或者 Moore-Penrose 广义逆.

由推论 2.2.5,T^+ 为有界线性算子当且仅当 $R(T)$ 为闭的.

定理 2.2.6 设 X,Y 为 Hilbert 空间，$T\in L(X,Y)$ 为闭线性算子且 $\overline{D(T)}=X, R(T)\subset Y$. 记 $D(T^+)=R(T)\dot{+}R(T)^\perp$，$C(T)=D(T)\cap N(T)^\perp, T^+\in L(D(T^+), C(T))$. 则下述命题除 (3) 外等价. 若 $D(T)=X, R(T)$ 闭，此时 $D(T^+)=Y$, 则下述命题全等价 (见 [Gr]) 或 [Wag1].

(1) T^+ 为 T 的正交广义逆.

(2)

$$\begin{cases} T^+TT^+=T^+, & 在\ D(T^+)上; \\ T^+T=P_{N(T)^\perp}, & 在\ D(T)上; \\ TT^+=P_{\overline{R(T)}}, & 在\ D(T^+)上, \end{cases}$$

这里 P_M 为到闭子空间 M 上的正交投影.

(3)

$$\begin{cases} TT^+T=T, & 在\ D(T)上; \\ T^+TT^+=T^+, & 在\ D(T^+)上; \\ (T^+T)^*=T^+T, & 在\ D(T)上; \\ (TT^+)^*=TT^+, & 在\ D(T^+)上. \end{cases}$$

(4)

$$T^+Tx=x, \quad x\in N(T)^\perp;$$
$$T^+y=\theta, \quad y\in R(T)^\perp.$$

(5) 对于 $y\in D(T^+), T^+y$ 为方程 $Tx=P_{\overline{R(T)}}y$ 唯一的最小范数解.

(6) 对 $y\in D(T^+), T^+y$ 为方程 $Tx=y$ 的唯一最佳逼近解 (即最小范数极值解).

(7) 对 $y\in D(T^+), T^+y$ 为方程 $T^*(Tx-y)=\theta$ 的唯一最小范数解.

(8) T^+ 为使 $N(T^+) = R(T)^\perp$ 且是 $(T|_{C(T)})^{-1}$ 自 $R(T)$ 向 $R(T)\dot{+}R(T)^\perp$ 的唯一线性延拓.

证明 (1)⇒(2). 由 (1), $T^+ \in L(Y,X)$ 满足 $TT^+T = T$, 在 $D(T)$ 上; $T^+TT^+ = T^+$, 在 $D(T^+)$ 上; $T^+T = I_{D(T)} - P_{N(T)}$, 在 $D(T)$ 上; $TT^+ = P_{\overline{R(T)}}$, 在 $D(T^+)$ 上, 这里 $P_{N(T)}, P_{\overline{R(T)}}$ 为 X 到 $N(T)$ 上, Y 到 $\overline{R(T)}$ 上的正交投影. 由 Riesz 正交分解定理, 有

$$I = P_{N(T)} + P_{N(T)^\perp},$$

从而 $I - P_{N(T)} = P_{N(T)^\perp}$, 故有 (2).

(2)⇒(4). 由 (2), $TT^+ = P_{\overline{R(T)}}$, 从而对 $y \in R(T)^\perp = \overline{R(T)}^\perp$, 有

$$T^+y = T^+TT^+y = T^+P_{\overline{R(T)}}y = \theta.$$

对 $x \in N(T)^\perp$, 需证 $T^+Tx = x$.

因为 $TT^+T = P_{\overline{R(T)}}T = T$, 对 $x \in X$, 有 $T^+Tx - x \in N(T)$. 又由 (2), 有 $T^+T = P_{N(T)^\perp}$, 于是对 $x \in N(T)^\perp$, 有

$$T^+Tx = x.$$

(4)⇒(5). 对于 $y \in D(T^+)$, 有唯一分解 $y = y_1 + y_2 \in R(T)\dot{+}R(T)^\perp$, 于是由 $y_2 \in R(T)^\perp$, 知 $T^+y_2 = 0$. 从而

$$TT^+y = TT^+y_1.$$

因为 $y_1 \in R(T)$, 存在 $x \in N(T)^\perp$, 使 $y_1 = Tx$, 因而

$$TT^+y = T(T^+Tx) = Tx = y_1.$$

另一方面, 由 $y = y_1 + y_2 \in R(T)\dot{+}R(T)^\perp$, 得

$$P_{\overline{R(T)}}y = y_1,$$

因此

$$TT^+y = P_{\overline{R(T)}}y. \tag{2.2.12}$$

如果 $u \in D(T)$ 满足

$$Tu = P_{\overline{R(T)}}y,$$

则由 (2.2.12)$u - T^+y \in N(T)$. 又由 $y = y_1 + y_2 \in R(T)\dot{+}R(T)^\perp$ 且 $T^+y_2 = \theta, y_1 = Tx, x \in N(T)^\perp$, 有

$$T^+y = T^+y_1 = T^+Tx = x.$$

因而 $T^+y \in N(T)^\perp$, 于是

$$T^+y \perp (u - T^+y).$$

由勾股定理, 有

$$\|u\|^2 = \|u - T^+y\| + \|T^+y\|^2 \geqslant \|T^+y\|^2.$$

即 T^+y 为满足 $Tx = P_{\overline{R(T)}}y$ 的唯一最小范数解.

(5)⇒(6). 显然.

(6)⇒(7). 对 $y \in D(T^+)$, 由 (6), $x_0 = T^+y$ 为 $Tx = y$ 的唯一最佳逼近解. 即对任意 $x \in D(T)$, 有

$$\|Tx_0 - y\| \leqslant \|Tx - y\|,$$

且对任意的 $u \in D(T)$ 满足

$$\|Tu - y\| \leqslant \|Tx - y\|, \quad \forall x \in D(T), \tag{2.2.13}$$

有 $\|T^+y\| \leqslant \|u\|$.

下面证: u 满足 (2.2.13) 等价于 $T^*(Tu - y) = \theta$.

设 $Q = P_{\overline{R(T)}}$, 则对 $y \in D(T^+) = R(T) \oplus R(T)^\perp$, 有 $Qy = P_{\overline{R(T)}}y \in R(T)$. 设 $x \in X$, 使

$$Qy = Tx.$$

由勾股定理, 及 (2.2.13) 有

$$\begin{aligned}\|Tu - y\|^2 =& \|Tu - Qy\|^2 + \|Qy - y\|^2 \\ =& \|Tu - Qy\|^2 + \|Tx - y\|^2 \\ \geqslant& \|Tu - Qy\|^2 + \|Tu - y\|^2,\end{aligned}$$

从而 $Tu - Qy = \theta$, 于是

$$Tu - y = Qy - y \in R(T)^\perp = \overline{R(T)}^\perp = N(T^*).$$

因此

$$T^*(Tu - y) = \theta. \tag{2.2.14}$$

反之, 若 (2.2.14) 成立, 易知 (2.2.13) 为真, 即

$$\begin{aligned}&\{u \in D(T) :\ T^*(Tu - y) = \theta\} \\ =& \{u \in X :\ \|Tu - y\| = \min\{\|Tx - y\|, x \in D(T)\}\}.\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

以 C 记上述集合, C 为 X 中闭凸集, 则最小范数元唯一. 因此, 由 (6),T^+y 为 C 中唯一最小范数解.

(7)⇒(8). 令 $\widetilde{T} = T|_{C(T)}$, 则 $\widetilde{T} : C(T) \to R(T)$ 为一对一的满射, $\widetilde{T}^{-1} : R(T) \to C(T)$ 存在. 令 $Q = P_{\overline{R(T)}}$, 则对任意 $y \in D(T^+) = R(T) \dot{+} R(T)^\perp$, 有 $Qy = P_{\overline{R(T)}}y \in R(T)$.

定义

$$T^\# y = \widetilde{T}^{-1}Qy, \quad y \in D(T^+).$$

则 $T^{\#}: D(T^+) \to C(T)$ 为线性算子，且 $T^{\#}y = \widetilde{T}^{-1}y$, $\forall y \in R(T)$; $T^{\#}y = \theta$, $\forall y \in R(T)^{\perp}$.

下面证： $T^+y = T^{\#}y$, $y \in D(T^+)$.

$\forall y \in D(T^+), T^{\#}y \in C(T) \subset N(T)^{\perp}$, 且

$$\begin{aligned} T^*(TT^{\#}y - y) &= T^*(T\widetilde{T}^{-1}Qy - y) \\ &= T^*(Qy - y). \end{aligned}$$

由于 $Qy \in R(T), Qy - y \in R(T)^{\perp} = \overline{R(T)}^{\perp} = N(T^*)$, 因此

$$T^*(TT^{\#}y - y) = \theta.$$

又对满足

$$T^*(Tu - y) = \theta$$

的 $u \in D(T)$, 有 $Tu = TT^{\#}y = Qy$, 于是 $u - T^{\#}y \in N(T)$. 注意到 $T^{\#}y \in C(T) \subset N(T)^{\perp}$, 由勾股定理，有

$$\|u\|^2 = \|u - T^{\#}y\|^2 + \|T^{\#}y\|^2 \geqslant \|T^{\#}y\|^2,$$

即

$$\|u\| \geqslant \|T^{\#}y\|.$$

由 (7) 及 T^+y 的唯一性，有

$$T^+y = T^{\#}y, \quad y \in D(T^+).$$

因此 $T^+ = \widetilde{T}^{-1}Q$ 为满足 $N(T^+) = R(T)^{\perp}$ 的 $(T|_{C(T)})^{-1}$ 向 $R(T)\dot{+}R(T)^{\perp}$ 上的唯一线性延拓.

(8)⇒(1). 设 $Q = P_{\overline{R(T)}}$ 为 Y 到 $\overline{R(T)}$ 上的正交投影，则 $\forall y \in D(T^+), Qy \in R(T)$. 令 $\widetilde{T} = T|_{C(T)}$, 由 (8), 有 $T^+ = \widetilde{T}^{-1}Q$. 因此，对 $x \in D(T)$, 有

$$\begin{aligned} T^+Tx &= \widetilde{T}^{-1}QTx = \widetilde{T}^{-1}Tx \\ &= \widetilde{T}^{-1}T(P_{N(T)}x + P_{N(T)^{\perp}}x) = \widetilde{T}^{-1}TP_{N(T)^{\perp}}x \\ &= P_{N(T)^{\perp}}x = (I_{D(T)} - P_{N(T)})x = (I_{D(T)} - P)x, \end{aligned}$$

这里 $P = P_{N(T)}$ 为 Y 到 $N(T)$ 上正交投影.

从而

$$TT^+Tx = T(x - Px) = Tx.$$

即在 $D(T)$ 上，有

$$TT^+T = T, \quad T^+T = I_{D(T)} - P.$$

又对 $y \in D(T^+)$, 有

$$TT^+y = T\widetilde{T}^{-1}Qy = Qy,$$

于是

$$T^+TT^+y = \widetilde{T}^{-1}Q^2y = \widetilde{T}^{-1}Qy = T^+y,$$

因此，在 $D(T^+)$ 上，有

$$T^+TT^+ = T^+, \quad TT^+ = Q.$$

T^+ 为 T 的正交广义逆. □

§2.3 线性斜投影广义逆 $T^+_{P,Q}$ 的扰动与连续性

1. 广义逆 $T^+_{P,Q}$ 的扰动

设 X, Y 为 Banach 空间， $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ 为从 X 到 Y 上的有界线性算子. T 的有界外逆 $T^\#$ 具有稳定性，而 T 的有界内逆 T^- 可以非常的不稳定 (见 §2.1). 从而可以看出， T 的有界线性斜投影广义逆 $T^+_{P,Q}$ 的稳定性的条件是值得研究的问题.

定理 2.3.1 设 $T \in \mathscr{L}(X,Y), T^+ \in \mathscr{L}(Y,X)$ 为 T 的广义逆. 设 $\overline{T} = T + \delta T \in \mathscr{L}(X,Y)$ 满足 $\|T^+\delta T\| < 1$ 且满足条件

(*): $(I + \delta TT^+)^{-1}\overline{T}$ 将 $N(T)$ 映入 $R(T)$,

则 $\overline{T}^+$ 存在，且

$$\overline{T}^+ = (I_X + T^+\delta T)^{-1}T^+ = T^+(I_Y + \delta TT^+)^{-1},$$

进而

$$R(\overline{T}^+) = R(T^+), \ N(\overline{T}^+) = N(T^+),$$

且

$$\|\overline{T}^+T\| \leqslant \frac{1}{1 - \|T^+\delta T\|},$$

与

$$\|\overline{T}^+\| \leqslant \frac{\|T^+\|}{1 - \|T^+\delta T\|}.$$

证明 因为 $\|T^+\delta T\| < 1$, 应用 Banach 引理，$(I_X + T^+\delta T)^{-1}$ 存在. 由 Neumann 级数易知

$$T^+(I_Y + \delta TT^+)^{-1} = (I_X + T^+\delta T)^{-1}T^+.$$

令 $C := T^+(I_Y + \delta TT^+)^{-1}$, 则

$$\begin{aligned}
&\overline{T} - \overline{T}C\overline{T} \\
&= \{I_Y - (T + \delta T)T^+(I_Y + \delta TT^+)^{-1}\}(T + \delta T) \\
&= \{I_Y + \delta TT^+ - (T + \delta T)T^+\}(I_Y + \delta TT^+)^{-1}(T + \delta T) \\
&= (I_Y - TT^+)(I_Y + \delta TT^+)^{-1}(T + \delta T)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (I_Y - TT^+)(I_Y + \delta TT^+)^{-1}\{(I_Y + \delta TT^+)T + \delta T(I_X - T^+T)\} \\
&= (I_Y - Q)(I_Y + \delta TT^+)^{-1}\delta TP, \qquad (2.3.1)
\end{aligned}
$$

这里 $Q = TT^+$ 为 Y 到 $R(T)$ 上的有界线性投影， $P = I_X - T^+T$ 为 X 到 $N(T)$ 上的界线性投影. 由假设条件，并注意 $T(I_X - T^+T) = \theta$, 有

$$
\begin{aligned}
\overline{T} - \overline{T}C\overline{T} &= (I_Y - Q)(I_Y + \delta TT^+)^{-1}\delta TP \\
&= (I_Y - Q)(I_Y + \delta TT^+)^{-1}(T + \delta T)P \\
&= (I_Y - Q)(I_Y + \delta TT^+)^{-1}\overline{T}P \\
&= \theta, \qquad (2.3.2)
\end{aligned}
$$

从而 $\overline{T}C\overline{T} = \overline{T}$,$C$ 为 $\overline{T}$ 的有界内逆. 注意

$$
R(C) = R(T^+(I_Y + \delta TT^+)^{-1}) = R(T^+), \qquad (2.3.3)
$$

且

$$
N(C) = N(T^+(I_Y + \delta TT^+)^{-1}) = N((I_X + T^+\delta T)^{-1}T^+) = N(T^+).
$$

另一方面，有

$$
\begin{aligned}
&C\overline{T}C - C \\
&= T^+(I_Y + \delta TT^+)^{-1}\{(T + \delta T)T^+(I_Y + \delta TT^+)^{-1}) - I\} \\
&= T^+(I_Y + \delta TT^+)^{-1}\{TT^+ + \delta TT^+ - (I_Y + \delta TT^+)\}(I_Y + \delta TT^+)^{-1} \\
&= T^+(I_Y + \delta TT^+)^{-1}(TT^+ - I_Y)(I_Y + \delta TT^+)^{-1}.
\end{aligned}
$$

因为

$$
N(T^+(I_Y + \delta TT^+)^{-1}) = N(T^+) = R(I_Y - TT^+),
$$

故有

$$
C\overline{T}C - C = T^+(I_Y + \delta TT^+)^{-1}(TT^+ - I_Y)(I_Y + \delta TT^+)^{-1} = \theta,
$$

因此 $C\overline{T}C = C$, 从而 C 为 $\overline{T}$ 的广义逆. 故

$$
\begin{aligned}
\overline{T}^+ &= T^+(I_Y + \delta TT^+)^{-1} \\
&= (I_X + T^+\delta T)^{-1}T^+. \qquad (2.3.4)
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\|\overline{T}^+\| &\leqslant \|(I_X + T^+\delta T)^{-1}\|\|T^+\| \\
&\leqslant \frac{\|T^+\|}{1 - \|T^+\delta T\|},
\end{aligned}
$$

同时

$$\|\overline{T}^+T\| \leqslant \frac{\|T^+T\|}{1-\|T^+\delta T\|} \leqslant \frac{1}{1-\|T^+\delta T\|}.$$ □

下面寻求与条件 (*) 等价的易于验证的条件.

对于 $T \in \mathscr{L}(X,Y)$,T 的最小模 $r(T)$, 定义为

$$r(T) = \inf\{\|Tx\| : \operatorname{dist}(x, N(T)) = 1\}. \tag{2.3.5}$$

由 $r(T)$ 的定义，我们导出

$$\|Tx\| \geqslant r(T)\operatorname{dist}(x, N(T)), \quad \forall x \in X. \tag{2.3.6}$$

根据 [Ka]p.234, 定理 5.13, p.231 定理 5.2, 我们有 $r(T) = r(T^*)$, 且 $R(T)$ 为闭的当且仅当 $r(T) > 0$.

引理 2.3.1 设 $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ 具有广义逆 $T^+ \in \mathscr{L}(Y,X)$, 则

$$\frac{1}{\|T^+\|} \leqslant r(T) \leqslant \frac{\|T^+T\|\|TT^+\|}{\|T^+\|}. \tag{2.3.7}$$

证明 对任意 $x \in X$,$y \in N(T)$, 有

$$\|T^+T(x-y)\| = \|T^+Tx\| \leqslant \|T^+T\|\|x-y\|,$$

$$\operatorname{dist}(x, N(T)) \leqslant \|x - (I_X - T^+T)x\| = \|T^+Tx\|.$$

因此，有

$$\|T^+\|\|Tx\| \geqslant \|T^+Tx\| \geqslant \operatorname{dist}(x, N(T)) \geqslant \frac{\|T^+Tx\|}{\|T^+T\|}. \tag{2.3.8}$$

将 $r(T)$ 的定义与 (2.3.8) 结合，有

$$r(T) \geqslant \frac{1}{\|T^+\|},$$

且由 (2.3.6), 有

$$\|Tx\| \geqslant r(T)\operatorname{dist}(x, N(T)) \geqslant r(T)\frac{\|T^+Tx\|}{\|T^+T\|}. \tag{2.3.9}$$

$\forall z \in Y$, 在 (2.3.9) 式中，令 $x = T^+z$, 有

$$\|TT^+z\| \geqslant r(T)\frac{\|T^+TT^+z\|}{\|T^+T\|}, \ \forall z \in Y,$$

从而

$$\|TT^+\| \geqslant r(T)\frac{\|T^+\|}{\|T^+T\|},$$

即

$$r(T) \leqslant \frac{\|TT^+\|\|T^+T\|}{\|T^+\|}.$$ □

设 X 为 Banach 空间, $V(X)$ 记 X 的所有闭子空间的集合.

定义映射 $\delta: V(X)\times V(X)\to R^+$ 为

$$\delta(M,N)=\sup\{\mathrm{dist}(x,N):\|x\|=1,x\in M\},\quad M,N\in V(X), \tag{2.3.10}$$

$$\hat{\delta}(M,N)=\max\{\delta(M,N),\delta(N,M)\}. \tag{2.3.11}$$

$\hat{\delta}(M,N)$ 称为 M 与 N 之间的间隙.

引理 2.3.2 设 $T\in\mathscr{L}(X,Y)$, 具有广义逆 $T^+\in\mathscr{L}(Y,X)$, $\overline{T}=T+\delta T\in\mathscr{L}(X,Y)$, 则有

(1) $$\delta(R(T),\overline{R(\overline{T})})\leqslant\|T^+\|\|\delta T\|, \tag{2.3.12}$$

(2) $$\delta(N(\overline{T}),N(T))\leqslant\|T^+\|\|\delta T\|. \tag{2.3.13}$$

证明 (1) 设 $u\in R(T)$, 满足 $\|u\|=1$. 取 $x\in X$, 使得 $u=Tx$, 则由 (2.3.6), 有

$$1=\|u\|=\|Tx\|\geqslant r(T)\mathrm{dist}(x,N(T)),$$

即

$$\mathrm{dist}(x,N(T))\leqslant\frac{1}{r(T)}\leqslant\|T^+\|.$$

因 $\forall z\in N(T)$, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(u,\overline{R(\overline{T})})&\leqslant\|u-\overline{T}(x-z)\|\\&\leqslant\|T(x-z)-\overline{T}(x-z)\|\\&\leqslant\|\delta T(x-z)\|\leqslant\|\delta T\|\|x-z\|,\end{aligned}$$

从而有 (2.3.12) 式.

(2) 选 $u\in N(\overline{T})$ 使得 $\|u\|=1$, 则 $Tu=\delta T(-u)$, 因此

$$\|\delta T\|\geqslant\|\delta T(-u)\|=\|Tu\|\geqslant r(T)\mathrm{dist}(u,N(T)),$$

由此及引理 2.3.1 推出

$$\delta(N(\overline{T}),N(T))\leqslant r(T)^{-1}\|\delta T\|\leqslant\|T^+\|\|\delta T\|.$$ □

定义 2.3.1 设 $T\in\mathscr{L}(X,Y)$ 具有广义逆 $T^+\in\mathscr{L}(Y,X)$. 设 $\overline{T}=T+\delta T\in\mathscr{L}(X,Y)$, 如果满足条件

$$R(\overline{T})\cap N(T^+)=\{\theta\}, \tag{2.3.14}$$

则称 $\overline{T}$ 为 T 的稳定扰动.

引理 2.3.3 设 $T\in\mathscr{L}(X,Y)$ 具有广义逆 $T^+\in\mathscr{L}(Y,X)$, $\overline{T}=T+\delta T\in\mathscr{L}(X,Y)$ 满足 $\|T^+\|\|\delta T\|<1$. 则

(1) $$TT^+\overline{T}(I_X+T^+\delta T)^{-1}=T, \tag{2.3.15}$$

(2) $$I_X-T^+\delta T(I_X+T^+\delta T)^{-1}=(I_X+T^+\delta T)^{-1}. \tag{2.3.16}$$

证明 (1) $TT^+\overline{T} = TT^+(T+\delta T) = TT^+T + TT^+\delta T = T(I_X + T^+\delta T)$. 因为 $\|T^+\delta T\| \leqslant \|T^+\|\|\delta T\| < 1$, 由 Banach 引理, $(I_X + T^+\delta T)^{-1}$ 存在, 且

$$TT^+\overline{T}(I_X + T^+\delta T)^{-1} = T.$$

(2) 经计算, 有

$$\begin{aligned} & I_X - T^+\delta T(I_X + T^+\delta T)^{-1} \\ =\ & I_X - (I_X + T^+\delta T - I_X)(I_X + T^+\delta T)^{-1} \\ =\ & (I_X + T^+\delta T)^{-1}. \end{aligned}$$

□

定理 2.3.2 设 $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ 具有广义逆 $T^+ \in \mathscr{L}(Y,X), \overline{T} = T + \delta T \in \mathscr{L}(X,Y)$ 满足 $\|T^+\|\|\delta T\| < 1$. 令

$$S = (I_X + T^+\delta T)^{-1}(I_X - T^+T), \tag{2.3.17}$$

则

(1) $S \in \mathscr{L}(X)$ 为有界线性投影算子;

(2) 如果 $\dim N(\overline{T}) = \dim N(T) < \infty$ 或 $\overline{T}$ 为 T 的稳定扰动, 则

$$R(S) = N(\overline{T}). \tag{2.3.18}$$

证明 (1) 只需证 S 的幂等性. 由 (2.3.16), 注意到 $T^+ = T^+TT^+$, 我们有 $(I_X - T^+T)T^+\delta T = 0$, 从而

$$\begin{aligned} S^2 &= (I_X + T^+\delta T)^{-1}(I_X - T^+T)(I_X + T^+\delta T)^{-1}(I_X - T^+T) \\ &= (I_X + T^+\delta T)^{-1}(I_X - T^+T) \\ &\quad\ [I_X - T^+\delta T(I_X + T^+\delta T)^{-1}](I_X - T^+T) \\ &= (I_X + T^+\delta T)^{-1}(I_X - T^+T) = S, \end{aligned}$$

即 S 为幂等的.

(2) 由恒等式 $T^+\overline{T} = T^+T + T^+\delta T$, 有

$$\begin{aligned} S &= (I_X + T^+\delta T)^{-1}(I_X - T^+T) \\ &= I_X - (I_X + T^+\delta T)^{-1}T^+\overline{T}. \end{aligned}$$

因而由 $S^2 = S$, 有 $N(\overline{T}) \subset R(S)$.

如果 $\dim N(\overline{T}) = \dim N(T) < \infty$, 则

$$\begin{aligned} \dim R(S) &= \dim R[(I_X + T^+\delta T)^{-1}(I_X - T^+T)] \\ &= \dim R(I_X - T^+T) = \dim N(T) = \dim N(\overline{T}). \end{aligned}$$

因为 $N(\overline{T}) \subset R(S)$, 从而 $R(S) = N(\overline{T})$.

现假定 $\overline{T}$ 为 T 的稳定扰动，由 (2.3.15), 有

$$\begin{aligned} TT^+\overline{T}S &= TT^+\overline{T}(I_X + T^+\delta T)^{-1}(I_X - T^+T) \\ &= T(I_X - T^+T) = \theta. \end{aligned}$$

由条件 $R(\overline{T}) \cap N(T^+) = \{\theta\}$, 导出 $\overline{T}S = \theta$, 于是 $R(S) \subset N(\overline{T})$. 因此 $R(S) = N(\overline{T})$. □

引理 2.3.4 设 $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ 具有广义逆 $T^+ \in \mathscr{L}(Y,X)$.$\overline{T} = T + \delta T \in \mathscr{L}(X,Y)$ 满足 $\|T^+\|\|\delta T\| < 1$, 则下述命题等价

(1) $R(S) = N(\overline{T})$;

(2) $(I_Y + \delta TT^+)^{-1}\overline{T}$ 将 $N(T)$ 映入 $R(T)$;

(3) $(I_X - T^+T)N(\overline{T}) = N(T)$,

这里 $S = (I_X + T^+\delta T)^{-1}(I_X - T^+T)$.

证明 (1)⇒(2). 仅需要证明等式

$$(I_Y - TT^+)(I_Y + \delta TT^+)^{-1}\overline{T}(I_X - T^+T) = \theta. \tag{2.3.19}$$

由 Banach 引理，有

$$(I_Y + \delta TT^+)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\delta TT^+)^n,$$

从而可导出

$$\begin{aligned} T^+(I_Y + \delta TT^+)^{-1} &= (I_X + T^+\delta T)^{-1}T^+, \\ (I_Y + \delta TT^+)^{-1}\delta_T &= \delta T(I_X + T^+\delta T)^{-1}. \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned} &(I_Y - TT^+)(I_Y + \delta TT^+)^{-1}\overline{T}(I_X - T^+T) \\ =& (I_Y - TT^+)(I_Y + \delta TT^+)^{-1}\delta T(I_X - T^+T) \\ =& (I_Y - TT^+)\delta T(I_X + T^+\delta T)^{-1}(I_X - T^+T) \\ =& (I_Y - TT^+)\overline{T}(I_X + T^+\delta T)^{-1}(I_X - T^+T) \\ =& (I_Y - TT^+)\overline{T}S = \theta. \end{aligned}$$

(以下如无必要，省去 I_X 或 I_Y 的下标，其含义可以从上下文明了).

(2)⇒(1). 假定 (2.3.19) 成立. 由引理 2.3.3, 有

$$\begin{aligned} \overline{T}S &= TT^+\overline{T}S + (I - TT^+)\overline{T}S \\ &= TT^+\overline{T}(I + T^+\delta T)^{-1}(I - T^+T) \\ &\quad + (I - TT^+)\overline{T}(I + T^+\delta T)^{-1}(I - T^+T) \\ &= T(I - T^+T) + (I - TT^+)(I + \delta TT^+)^{-1}\overline{T}(I - T^+T) = 0, \end{aligned}$$

因此 $R(S) \subset N(\overline{T})$. 由定理 2.3.2 的证明，知 $N(\overline{T}) \subset R(S)$. 于是 $R(S) = N(\overline{T})$.

(2)⇒(3). 类似 (2.3.15), 经直接计算，得

$$(I + \delta TT^{+})^{-1}\overline{T}T^{+}T = T, \tag{2.3.20}$$

于是对任意 $x \in X$, 由 (2.3.20), 有

$$\begin{aligned}&(I + \delta TT^{+})^{-1}\overline{T}x \\ =& (I + \delta TT^{+})^{-1}\overline{T}T^{+}Tx + (I + \delta TT^{+})^{-1}\overline{T}(I - T^{+}T)x \\ =& Tx + (I + \delta TT^{+})^{-1}\overline{T}(I - T^{+}T)x,\end{aligned}$$

因此 $(I + \delta TT^{+})^{-1}\overline{T}N(T) \subset R(T)$ 当且仅当 $R((I + \delta TT^{+})^{-1}\overline{T}) \subset R(T)$.

只需证： $R((I + \delta TT^{+})^{-1}\overline{T}) \subset R(T)$ 蕴涵 $(I - T^{+}T)N(\overline{T}) = N(T)$.

如果 $R((I + \delta TT^{+})^{-1}\overline{T}) \subset R(T)$, 则 $\forall x \in N(T)$ 存在 $y \in R(T^{+}) = R(T^{+}T)$, 满足

$$(I + \delta TT^{+})^{-1}\overline{T}x = Ty.$$

由 (2.3.20), 有

$$\begin{aligned}(I + \delta TT^{+})^{-1}\overline{T}x =& Ty \\ =& (I + \delta TT^{+})^{-1}\overline{T}T^{+}Ty \\ =& (I + \delta TT^{+})^{-1}\overline{T}y.\end{aligned}$$

于是 $z = x - y \in N(\overline{T})$ 且满足

$$x = (I - T^{+}T)z \in (I - T^{+}T)N(\overline{T}),$$

因此，有

$$N(T) \subset (I - T^{+}T)N(\overline{T}). \tag{2.3.21}$$

显然

$$(I - T^{+}T)N(\overline{T}) \subset N(T). \tag{2.3.22}$$

综合 (2.3.21) 与 (2.3.22), 得

$$N(T) = (I - T^{+}T)N(\overline{T}). \tag{2.3.23}$$

(3)⇒(2). 设 (2.3.23) 成立. $\forall x \in X$, 存在 $y \in N(\overline{T})$, 满足

$$(I - T^{+}T)x = (I - T^{+}T)y.$$

由公式 (2.3.20), 有

$$\begin{aligned}&(I + \delta TT^{+})^{-1}\overline{T}x \\ =& Tx + (I + \delta TT^{+})^{-1}\overline{T}(I - T^{+}T)x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= Tx + (I+\delta TT^+)^{-1}\overline{T}(I-T^+T)y \\
&= Tx - (I+\delta TT^+)^{-1}\overline{T}T^+Ty \\
&= T(x-y),
\end{aligned}
$$

因此

$$R((I+\delta TT^+)^{-1}\overline{T}) \subset R(T).$$

于是

$$(I+\delta TT^+)^{-1}\overline{T}N(T) \subset R(T),$$

即 (2) 为真. □

定理 2.3.3 设 $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ 具有广义逆 $T^+ \in \mathscr{L}(Y,X), \overline{T} = T + \delta T \in \mathscr{L}(X,Y)$ 满足 $\|T^+\|\|\delta T\| < 1$. 假设下述条件之一成立:

(1) $\dim N(\overline{T}) = \dim N(T) < +\infty$ 或 $R(\overline{T}) \cap N(T^+) = \{0\}$;

(2) $(I - T^+T)N(\overline{T}) = N(T)$.

则 $\overline{T}$ 有广义逆 $\overline{T}^+$, $N(\overline{T}^+) = N(T^+), R(\overline{T}^+) = R(T^+)$, 且

$$\overline{T}^+ = (I + T^+\delta T)^{-1}T^+ = T^+(I+\delta TT^+)^{-1}$$

与

$$\|\overline{T}^+\| \leqslant \frac{\|T^+\|}{1 - \|T^+\|\|\delta T\|}.$$

证明 若条件 (1) 成立, 由定理 2.3.2, 引理 2.3.4, 知定理 2.3.1 中条件 (*) 为真. 从而得到结论. 若条件 (2) 为真, 应用引理 2.3.4 及定理 2.3.1 即可. □

推论 2.3.4 设 $X = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|), Y = (\mathbb{C}^m, \|\cdot\|)$, $T, \overline{T} = T + \delta T \in \mathscr{L}(X,Y)$ 满足 $\|T^+\|\|\delta T\| < 1$, 则 $\overline{T}$ 为 T 的稳定扰动 (即 $R(\overline{T}) \cap N(T^+) = \{\theta\}$) 当且仅当 $\operatorname{rank}(\overline{T}) = \operatorname{rank}(T)$.

证明 由引理 2.3.2, $\delta(R(T), R(\overline{T})) \leqslant \|T^+\|\|\delta T\| < 1$, 从而 $\dim R(T) \leqslant \dim R(\overline{T})$ (见 [Ka] p.200, 推论 2.6). 现假定 $R(\overline{T}) \cap N(T^+) = \{\theta\}$, 则

$$
\begin{aligned}
m &\geqslant \dim[R(\overline{T}) \dotplus N(T^+)] \\
&= \dim R(\overline{T}) + \dim N(T^+) \\
&= \dim R(\overline{T}) + m - \dim R(T).
\end{aligned}
$$

因此 $\dim R(\overline{T}) \leqslant \dim R(T)$, 于是 $\dim R(\overline{T}) = \dim R(T)$, 此即

$$\operatorname{rank}(\overline{T}) = \operatorname{rank}(T).$$

反之, 如果 $\operatorname{rank}(\overline{T}) = \operatorname{rank}(T)$, 则 $\dim N(\overline{T}) = \dim N(T) < \infty$, 由定理 2.3.3, 可知 $\overline{T}$ 有广义逆

$$\overline{T}^+ = (I + T^+\delta T)^{-1}T^+,$$

因此 $N(\overline{T}^+) = N(T^+)$. 从而

$$R(\overline{T}) \cap N(T^+) = R(\overline{T}) \cap N(\overline{T}^+) = \{\theta\}. \qquad \square$$

定理 2.3.5 设 $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ 具有外逆 $T^\# \in \mathscr{L}(Y,X)$, $\overline{T} = T + \delta T \in \mathscr{L}(X,Y)$ 满足 $\|T^\#\delta T\| < 1$. 则

$$S = (I + T^\#\delta T)^{-1}T^\# = T^\#(I + \delta T T^\#)^{-1}$$

为 $\overline{T}$ 的广义逆的充分必要条件为

$$R(\overline{T}) \cap N(T^\#) = \{\theta\}, \tag{2.3.24}$$

证明 必要性. 设 $S = \overline{T}^+$ 为 $\overline{T}$ 的广义逆, 则 $Y = R(\overline{T}) \oplus N(\overline{T}\,\overline{T}^+)$ 且 $N(\overline{T}\,\overline{T}^+) = N(\overline{T}^+) = N(S)$. 于是

$$R(\overline{T}) \cap N(S) = \{\theta\}.$$

另一方面, 由 §2.1 中定理 2.1.12,$N(S) = N(T^\#)$, 从而

$$R(\overline{T}) \cap N(T^\#) = \{\theta\}.$$

充分性. 由条件 $\|T^\#\delta T\| < 1$, 应用 §2.1 中关于有界外逆稳定性的定理 2.1.12 可推知 S 为 $\overline{T}$ 的外逆, 且 $N(S) = N(T^\#)$. 再由条件 (2.3.24), 有

$$R(\overline{T}) \cap N(S) = R(\overline{T}) \cap N(T^\#) = \{\theta\}.$$

由于 S 为 $\overline{T}$ 的外逆, 故 $S\overline{T}$ 为幂等的, 且显然 $N(\overline{T}) \subset N(S\overline{T})$.

又 $\forall x \in N(S\overline{T}), S\overline{T}x = \theta$, 从而 $\overline{T}x \in R(\overline{T}) \cap N(S)$. 故 $\overline{T}x = 0$, 因此 $N(S\overline{T}) \subset N(\overline{T})$. 于是

$$N(S\overline{T}) = N(\overline{T}).$$

由定理 2.1.4, S 为 $\overline{T}$ 的内逆, 从而 $S = \overline{T}^+$ 为 $\overline{T}$ 的广义逆. $\square$

下面给出稳定扰动的刻画条件.

引理 2.3.5 设 $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ 具有广义逆 $T^+ \in \mathscr{L}(Y,X)$, $\overline{T} = T + \delta T \in \mathscr{L}(X,Y)$. 如果 $\delta(\overline{R(\overline{T})}, R(T)) < \|I - TT^+\|^{-1}$, 则 $\overline{T}$ 为 T 的稳定扰动, 即 $R(\overline{T}) \cap N(T^+) = \{\theta\}$.

证明 假如 $[R(\overline{T}) \cap N(T^+)]\backslash\{\theta\} \neq \varnothing$, 选 $u \in R(\overline{T})$ 满足 $T^+u = 0$ 且 $\|u\| = 1$. 对 $z \in X$, 有

$$\begin{aligned} 1 = \|u\| &= \|(I - TT^+)(u - Tz)\| \\ &\leqslant \|I - TT^+\|\|u - Tz\|, \end{aligned}$$

从而

$$\delta(\overline{R(\overline{T})}), R(T)) \geqslant \|I - TT^+\|^{-1},$$

此为矛盾. 因此 $R(\overline{T}) \cap N(T^+) = \{\theta\}$. □

推论 2.3.6 设 $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ 具有广义逆 $T^+ \in \mathscr{L}(Y,X), \overline{T} = T + \delta T \in \mathscr{L}(X,Y)$ 满足 $\|T^+\|\|\delta T\| < [1 + \|I - TT^+\|]^{-1}$. 如果 $\dim N(\overline{T}) = \dim N(T) < \infty$, 则 $\overline{T}$ 为 T 的稳定扰动.

证明 由引理 2.3.2 及定理 2.3.3, 有

$$\begin{aligned}\delta(\overline{R(\overline{T})}, R(T)) &\leqslant \|\overline{T}^+\|\|\delta T\| \\ &\leqslant \frac{\|T^+\|\|\delta T\|}{1 - \|T^+\|\|\delta T\|} \\ &< \frac{1}{\|I - TT^+\|}.\end{aligned}$$

由引理 2.3.5, 有 $R(\overline{T}) \cap N(T^+) = \{\theta\}$. □

下面给出 $R(\overline{T}) \cap N(T^+) = \{\theta\}$ 的等价条件.

定理 2.3.7 设 $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ 具有广义逆 $T^+ \in \mathscr{L}(Y,X), \overline{T} = T + \delta T \in \mathscr{L}(X,Y)$ 满足 $\|T^+\|\|\delta T\| < [1 + \|I - TT^+\|]^{-1}$. 则下述命题等价

(1) $\overline{T}$ 为 T 的稳定扰动;

(2) $(I + \delta TT^+)^{-1}\overline{T}N(T) \subset R(T)$;

(3) $\overline{T}^+$ 存在, 且 $\overline{T}^+ = T^+(I + \delta TT^+)^{-1}, \|\overline{T}^+\| \leqslant \|T^+\|[1 - \|\delta T\|\|T^+\|]^{-1}$;

(4) $\delta(N(T), N(\overline{T})) < \|I - TT^+\|^{-1}$;

(5) $\delta(R(\overline{T}), R(T)) < \|I - TT^+\|^{-1}$.

证明 (1)⇒(2). 由定理 2.3.2 及引理 2.3.4 推得.

(2)⇒(3). 由定理 2.3.1 可得.

(3)⇒(4). 由引理 2.3.2, 将 T 与 $\overline{T}$ 互换, 得

$$\delta(N(T), N(\overline{T})) \leqslant \|\overline{T}^+\|\|\delta T\|,$$

再由 (3) 及条件

$$\begin{aligned}\delta(N(T), N(\overline{T})) &\leqslant \frac{\|T^+\|\|\delta T\|}{1 - \|T^+\|\|\delta T\|} \\ &< \frac{1}{\|I - TT^+\|}.\end{aligned}$$

(4)⇒(5). 由 ([Ka]p.201, 定理 2.9), 我们有

$$\begin{aligned}\delta(\overline{R(\overline{T}^*)}, R(T^*)) &= \delta(N(\overline{T})^\perp, N(T)^\perp) \\ &= \delta(N(T), N(\overline{T})) \\ &< \|I - TT^+\|^{-1}.\end{aligned}$$

注意到 T^+ 存在当且仅当 $(T^*)^+$ 存在, 且 $(T^*)^+ = (T^+)^*, \|I - TT^+\| = \|I^* - T^*T^{*+}\|$, 应用引理 2.3.5,

$$R(\overline{T}^*) \cap N((T^*)^+) = \{\theta\}.$$

由定理 2.3.3, $\overline{T}^*$ 有广义逆

$$(\overline{T}^*)^+ = [I^* + (T^*)^+(\delta T)^*]^{-1}(T^*)^+$$

且

$$\begin{aligned}\|(\overline{T}^*)^+\| &\leqslant \frac{\|(T^*)^+\|}{1 - \|\|(T^*)^+\|\|(\delta T)^*\|} \\ &= \frac{\|T^+\|}{1 - \|T^+\|\|\delta T\|}.\end{aligned}$$

应用 ([Ka]p.201, 定理 2.9) 及引理 2.3.2, 互换 $\overline{T}$ 与 T, 有

$$\begin{aligned}&\delta(R(\overline{T}, R(T))) = \delta(R(T)^\perp, R(\overline{T})^\perp) \\ &= \delta(N(T^*), N(\overline{T}^*)) = \delta(R(\overline{T}^{**}), R(T^{**})) \\ &\leqslant \|(\overline{T}^{**})^+\|\|(\delta T)^{**}\| = \|(\overline{T})^+\|\|\delta T\| \\ &\leqslant \frac{\|T^+\|\|\delta T\|}{1 - \|T^+\|\|\delta T\|} < \frac{1}{\|I - TT^+\|}.\end{aligned}$$

(5)⇒(1). 由引理 2.3.5 立得. □

定理 2.3.8 设 $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ 具有广义逆 $T^+ \in \mathscr{L}(Y, X), \overline{T} = T + \delta T \in \mathscr{L}(X, Y)$ 满足 $\|T^+\|\|\delta T\| < 1$, $\overline{T}$ 为 T 的稳定扰动的充分必要条件为: 存在算子 $\Delta T \in \mathscr{L}(X, Y)$ 满足条件

$$(I - TT^+)\Delta T(I - T^+T) = \theta, \ \|T^+\Delta T\| < 1, \ \|\Delta TT^+\| < 1, \tag{2.3.25}$$

使得

$$\delta T = \Delta T - (I - TT^+)(I + \Delta TT^+)^{-1}\Delta T(I - T^+T). \tag{2.3.26}$$

证明 必要性. 设 $\overline{T}$ 为 T 的稳定扰动. 令

$$\begin{aligned}\Delta T = TT^+\delta TT^+T + TT^+\delta T(I - T^+T) \\ + (I - TT^+)\delta TT^+T.\end{aligned}$$

则 ΔT 满足 (2.3.25). 应用公式

$$I - (I + \delta TT^+)^{-1}\delta TT^+ = (I + \delta TT^+)^{-1},$$

由于

$$\begin{aligned}\Delta TT^+ = TT^+\delta TT^+ + (I - TT^+)\delta TT^+ = \delta TT^+, \\ \Delta T(I - T^+T) = TT^+\delta T(I - T^+T),\end{aligned}$$

我们有

$$
\begin{aligned}
&(I-TT^{+})(I+\Delta TT^{+})^{-1}\Delta T(I-T^{+}T)\\
=&(I-TT^{+})(I+\delta TT^{+})^{-1}TT^{+}\delta T(I-T^{+}T)\\
=&(I-TT^{+})[I-(I+\delta TT^{+})^{-1}\delta TT^{+}]TT^{+}\delta T(I-T^{+}T)\\
=&-(I-TT^{+})(I+\delta T^{+}T)^{-1}\delta TT^{+}\delta T(I-T^{+}T).
\end{aligned}
$$

由恒等式

$$(I+\delta TT^{+})^{-1}\delta TT^{+}=I-(I+\delta TT^{+})^{-1}$$

及条件 $R(\overline{T})\cap N(T^{+})=\theta$, 应用定理 2.3.2 及引理 2.3.4 中 (2) 有

$$(I-TT^{+})(I+\delta TT^{+})^{-1}\delta T(I-T^{+}T)=\theta.$$

从而，有

$$
\begin{aligned}
&(I-TT^{+})(I+\Delta TT^{+})^{-1}\Delta T(I-T^{+}T)\\
=&-(I-TT^{+})\delta T(I-T^{+}T)+(I-TT^{+})(I+\delta TT^{+})^{-1}\delta T(I-T^{+}T)\\
=&-(I-TT^{+})\delta T(I-T^{+}T).
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
&\Delta T-(I-TT^{+})(I+\Delta TT^{+})^{-1}\Delta T(I-T^{+}T)\\
=&\Delta T+(I-TT^{+})\delta T(I-T^{+}T)\\
=&TT^{+}\delta TT^{+}T+TT^{+}\delta T(I-T^{+}T)\\
&+(I-TT^{+})\delta TT^{+}T+(I-TT^{+})\delta T(I-T^{+}T)\\
=&\delta T.
\end{aligned}
$$

充分性. 设 $\Delta T\in\mathscr{L}(X,Y)$ 满足 (2.3.25), (2.3.26), 需证： $R(\overline{T})\cap N(T^{+})=\{\theta\}$.

如若不然，取 $x=\overline{T}y\neq\theta$ 且 $T^{+}x=\theta$. 令 $y_1=T^{+}Ty, y_2=(I-T^{+}T)y$, 由 (2.3.26), 有

$$
\begin{aligned}
&(T+TT^{+}\Delta TT^{+}T)y_1+TT^{+}\Delta T(I-T^{+}T)y_2\\
=&Ty+TT^{+}\Delta Ty\\
=&T(T^{+}Ty+T^{+}\delta Ty)=\theta. \qquad (2.3.27)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x=&(I-TT^{+})\Delta TT^{+}Ty_1\\
&-(I-TT^{+})(I+\Delta TT^{+})^{-1}\Delta T(I-T^{+}T)y_2, \qquad (2.3.28)
\end{aligned}
$$

由 (2.3.27) 及 $T:R(T^{+})\rightarrow R(T)$ 的单射性，得到

$$y_1=-(I+T^{+}\Delta T)^{-1}T^{+}\Delta Ty_2.$$

因此，由 (2.3.28), (2.3.25), 经简单计算，得

$$\begin{aligned} x = & -(I - TT^+)\Delta TT^+T(I + T^+\Delta T)^{-1}T^+\Delta Ty_2 \\ & -(I - TT^+)(I + \Delta TT^+)^{-1}\Delta Ty_2 \\ = & \ \theta. \end{aligned}$$

此为矛盾，因此

$$R(\overline{T}) \cap N(T^+) = \{\theta\}. \qquad \square$$

2. 广义逆 $T^+_{P,Q}$ 的连续性

设 $\wedge$ 为拓扑空间，$T_x : \wedge \to \mathscr{L}(X,Y)$ 为连续的. 如果 T_x 的广义逆 T_x^+ 存在，由 $T_x \to T_{x_0}$ 一般不能推出 $T_x^+ \to T_{x_0}^+$.

反例如下：

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_x = \begin{pmatrix} 1+x & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, x \geqslant 0,$$

有

$$A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad A_x^+ = \begin{pmatrix} x^{-1} & -x^{-1} \\ -x^{-1} & 1+x^{-1} \end{pmatrix}, x \geqslant 0.$$

显然，$\lim_{x\to x_0} A_x = A$, 但 $\lim_{x\to 0} A_x^+ = A^+$ 不真，(见 [Na1] p.367).

因此，需给出 T_x^+ 为连续的充分必要条件.

下面引进 T_x 的局部精细点的概念.

定义 2.3.2 设 $\wedge$ 为拓扑空间，$x_0 \in \wedge$, $T_x : \wedge \to \mathscr{L}(X,Y)$. 如果满足：

(1) 存在 $T_0 = T_{x_0}$ 的广义逆 $T_0^+ \in \mathscr{L}(Y,X)$;

(2) 存在 $x_0 \in \wedge$ 的邻域 U_0, 满足：$\forall x \in U_0, T_x$ 均为 T_0 的稳定扰动，即

$$R(T_x) \cap N(T_0^+) = \{\theta\}, \forall x \in U_0.$$

则称 x_0 为 T_x 的局部精细点.

局部精细点的概念是一个重要的概念. 在 T_x^+ 的连续性，非线性映射的局部线性化及 Banach 流形的构造中，均有重要的应用.

首先，讨论 T_x^+ 的连续性.

定理 2.3.9 设 $T_x : \wedge \to \mathscr{L}(X,Y)$ 在 $x_0 \in \wedge$ 连续. $T_0 = T_{x_0}$ 具有广义逆 $T_0^+ \in \mathscr{L}(Y,X)$. 则

(1) 存在 x_0 的邻域 $V_0, \forall x \in V_0, T_x$ 具有广义逆 $T_x^+ \in \mathscr{L}(Y,X)$, 且

$$T_x = T_0^+[I + (T_x - T_0)T_0^+]^{-1};$$

(2) $\lim_{x\to x_0} T_x^+ = T_0^+$ 成立，当且仅当 x_0 为 T_x 的局部精细点.

证明　必要性. 设存在 x_0 的邻域 V_0 使条件 (1), (2) 成立. 因为 $\lim_{x\to x_0} T_x = T_0$. 且 $T_0^+ \in \mathscr{L}(Y,X)$. 不失一般性, 设 $\forall x \in V_0$, 有 $\|T_0^+\|\|T_x - T_0\| < [1+\|I-T_0T_0^+\|]^{-1}$. 由定理 2.3.7 中 (3)⇒(1), 有 $\forall x \in V_0, T_x$ 为 T_0 的稳定扰动, 从而 x_0 为 T_x 的局部精细点.

充分性. 设 x_0 为 T_x 局部精细点. 由 $T_0^+ \in \mathscr{L}(Y,X)$ 且 $\lim_{x\to x_0} T_x = T_0$, 故存在 x_0 的邻域 V_0, 满足 $\forall x \in V_0$, 有

$$\|T_0^+\|\|T_x - T_0\| < [1+\|I-T_0T_0^+\|]^{-1}, \tag{2.3.29}$$

且

$$R(T_x)\cap N(T_0^+) = \{\theta\}.$$

由定理 2.3.7 中 (1)⇒(3), 知 T_x 具有广义逆 $T_x^+ \in \mathscr{L}(Y,X)$, 且

$$T_x^+ = T_0^+[I+(T_x-T_0)T_0^+]^{-1}.$$

注意到, 由 Banach 引理及 $\|T_x - T_0\|\|T_0^+\| < 1$, 有

$$[I+(T_x-T_0)T_0^+]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}[(T_0-T_x)T_0^+]^n,$$

从而

$$\begin{aligned}
&[I+(T_x-T_0)T_0^+]^{-1} - I\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}[(T_0-T_x)T_0^+]^n\\
&= (T_0-T_x)T_0^+\sum_{n=0}^{\infty}[(T_0-T_x)T_0^+]^n\\
&= (T_0-T_x)T_0^+[I+(T_x-T_0)T_0^+]^{-1}.
\end{aligned}$$

于是由定理 2.3.7 中 (3), 及 (2.3.29) 有

$$\begin{aligned}
\|T_x^+ - T_0^+\| &\leqslant \|T_0^+\|\|[I+(T_x-T_0)T_0^+]^{-1} - I\|\\
&\leqslant \frac{\|T_x-T_0\|\|T_0^+\|^2}{1-\|T_x-T_0\|\|T_0^+\|}\\
&< \frac{\|T_x-T_0\|\|T_0^+\|^2}{1-[1+\|I-T_0T_0^+\|]^{-1}}.
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x\to x_0} T_x^+ = T_0^+. \qquad \square$$

下面给出局部精细点的等价条件. 为此, 首先证明一个有用的引理.

引理 2.3.6 设 $T_0 \in \mathscr{L}(X,Y)$ 具有广义逆 $T_0^+ \in \mathscr{L}(Y,X)$, 映射 $\wedge : \mathscr{L}(X,Y) \to \mathscr{L}(X, R_0 \times N_0)$ 定义为

$$(\wedge T)x = (T_0T_0^+Tx, (I - T_0^+T_0)x), x \in X,$$

这里 $R_0 = R(T_0), N_0 = N(T_0)$, 则

(1) $\wedge$ 为连续的;

(2) 存在 T_0 的邻域 V_0, 使

$$R(T_0T_0^+T) = R_0, \quad (\wedge T) \in \mathscr{L}(X, R_0 \times N_0).$$

$\wedge T$ 为可逆算子, 且

$$N(T_0T_0^+T) = (\wedge T)^{-1}[\{\theta\} \times N_0], \forall T \in V_0. \tag{2.3.30}$$

证明 (i) 对任意 $T, S \in \mathscr{L}(X,Y), x \in X$, 由 $\wedge$ 的定义, 有

$$\wedge(T - S)(x) = (T_0T_0^+(T - S)x, \theta).$$

显然, 有

$$\| \wedge (T - S)\| \leqslant \|T_0T_0^+\|\|T - S\|,$$

于是 $\wedge$ 为连续线性算子.

(ii) 首先证 $\wedge T_0 \in \mathscr{L}(X, R_0 \times N_0)$ 为可逆算子. 只需证 $N(\wedge T_0) = \{\theta\}$, 且 $R(\wedge T_0) = R_0 \times N_0$.

$\forall x \in N(\wedge T_0)$, 有

$$\begin{aligned}\theta = (\wedge T_0)x &= (T_0T_0^+T_0x, (I - T_0^+T_0)x) \\ &= (T_0x, (I - T_0^+T_0)x).\end{aligned}$$

因此 $T_0x = \theta, (I - T_0^+T_0)x = \theta$, 从而 $x = (I - T_0^+T_0)x + T_0^+T_0x = \theta$. 故 $N(\wedge T_0) = \{\theta\}$.

对于任意 $(x, y) \in R_0 \times N_0$, 取 $u = T_0^+x + y$, 有

$$\begin{aligned}(\wedge T_0)u &= (T_0T_0^+T_0(T_0^+x + y), (I - T_0^+T_0)(T_0^+x + y)) \\ &= (T_0T_0^+x, (I - T_0^+T_0)y) = (x, y),\end{aligned}$$

即 $\wedge T_0$ 为满射, $R(\wedge T_0) = R_0 \times N_0$, 因此 $\wedge T_0$ 为可逆算子. 且 $\forall (x, y) \in R_0 \times N_0$, 有 $(\wedge T_0)^{-1}(x, y) = T_0x + y$.

设 $M_0 = \max(1, \|T_0^+\|)$, 则

$$\|(\wedge T_0)^{-1}\| \leqslant M_0.$$

设 $S \in \mathscr{L}(X, R_0 \times N_0)$ 满足

$$\|S - \wedge T_0\| < M_0^{-1},$$

则 $\|(S - (\wedge T_0))(\wedge T_0)^{-1}\| < 1$, 从而 S 为可逆算子且 $S^{-1} \in \mathscr{L}(R_0 \times N_0, X)$.

令

$$V_0 = \{T \in \mathscr{L}(X, Y) : \|T - T_0\| < (M_0\|T_0T_0^+\|)^{-1}\},$$

则 $\forall T \in V_0$, 令 $S = \wedge T$, 有

$$\begin{aligned}\|S - \wedge T_0\| &= \| \wedge (T - T_0)\| \\ &\leqslant \|T_0T_0^+\|\|T - T_0\| \\ &< M_0^{-1}.\end{aligned}$$

因此 $S = \wedge T \in \mathscr{L}(X, R_0 \times N_0)$ 为可逆算子.

$\forall x \in R_0$, 取 $T \in V_0$, 令 $u = (\wedge T)^{-1}(x, \theta)$, 则 $u \in X$, 且 $(\wedge T)u = (x, \theta)$, 从而 $T_0T_0^+Tu = x$. 因此 $x \in R(T_0T_0^+T)$, 故 $R_0 = R(T_0T_0^+T)$.

$\forall T \in V_0$, 任取 $x \in (\wedge T)^{-1}(\{\theta\} \times N_0)$, 有

$$(\wedge T)x = (T_0T_0^+Tx, (I - T_0^+T_0)x) \in \{\theta\} \times N_0.$$

从而 $x \in N(T_0T_0^+T)$, 因此

$$N(T_0T_0^+T) \supset (\wedge T)^{-1}(\{\theta\} \times N_0).$$

又任取 $x \in N(T_0T_0^+T)$, 有

$$(\wedge T)x = (T_0T_0^+Tx, (I - T_0^+T_0)x) \in \{\theta\} \times N_0,$$

于是

$$N(T_0T_0^+T) = (\wedge T)^{-1}(\{\theta\} \times N_0).$$ □

以下设 $\wedge$ 为拓扑空间.

定理 2.3.10　设 $T_x : \wedge \to \mathscr{L}(X, Y)$ 为在 $x_0 \in E$ 连续的，$T_0 = T_{x_0}$ 为有限秩的，且存在广义逆 $T_0^+ \in \mathscr{L}(Y, X)$, 则 x_0 为 T_x 的局部精细点当且仅当存在 x_0 的邻域 V_0, 使

$$\text{rank}T_x = \text{rank}T_0, \ \forall x \in V_0.$$

证明　必要性. 设 $x_0 \in \Lambda$ 为 T_x 的局部精细点，即存在 x_0 的邻域 $V_0, \forall x \in V_0$, 有

$$R(T_x) \cap N(T_0^+) = \{\theta\}.$$

由定理 2.3.8,$\forall x \in V_0$, T_x 有广义逆 $T_x^+ \in \mathscr{L}(Y, X)$, 且

$$T_x^+ = T_0^+[I + (T_x - T_0)T_0^+]^{-1}.$$

由此易知：$\forall x \in V_0$,

$$T_x^+ = [I + T_0^+(T_x - T_0)]^{-1}T_0^+,$$

于是得

$$N(T_x^+) = N(T_0^+),\ \forall x \in V_0. \tag{2.3.31}$$

从而得空间 Y 的拓扑直和分解

$$Y = R(T_0) \oplus N(T_0^+)$$

及

$$Y = R(T_x) \oplus N(T_x^+), \forall x \in V_0.$$

由 (2.3.31), 有

$$Y/N(T_0^+) = Y/N(T_x^+), \forall x \in V_0.$$

但商空间 $Y/N(T_x^+)$ 与 $R(T_x)$ 拓扑同构 $(x \in V_0)$, 从而

$$\dim R(T_x) = \dim R(T_0) < \infty,\ \forall x \in V_0,$$

即

$$\text{rank} T_x = \text{rank} T_0,\ \forall x \in V_0.$$

充分性. 设存在 x_0 的邻域 V_0, 满足

$$\text{rank} T_x = \text{rank} T_0,\ \forall x \in V_0,$$

即

$$\dim R(T_x) = \dim R(T_0) < \infty,\ \forall x \in V_0.$$

由于 $\forall x \in V_0, X$ 有代数直和分解

$$X = N(T_x) \dot{+} N^-(T_x),$$

$N^-(T_x)$ 为 $N(T_x)$ 的代数补子空间，而 $T_x : N^-(T_x) \to R(T_x)$ 为线性同构，从而

$$\dim N^-(T_x) = \dim R(T_x) < \infty.$$

注意商空间 $X/N(T_x)$ 与 $N^-(T_x)$ 线性同构，从而 $\text{codim} N(T_x) < \infty$.

由定理 1.1.4, $\forall x \in V_0, N(T_x)$ 与 $R(T_x)$ 分别在 X, Y 中拓扑可补. 记 $N_x = N(T_x)$, $R_x = R(T_x), N_x^-, R_x^-$ 分别 N_x, R_x 的拓扑补子空间，则 $X = N_x \oplus N_x^-, Y = R_x \oplus R_x^-, \forall x \in V_0$. 显然 $T_x|_{N_x^-}$ 为一对一且到上的映射，定义为

$$T_x^+ h = \begin{cases} (T_x|_{N_x^-})^{-1} h, & h \in R_x, \\ \theta, & h \in R_x^-. \end{cases}$$

$\forall h \in Y, h = h_1 + h_2,\ h_1 \in R_x, h_2 \in R_x^-$, 有 $T_x^+ h = (T_x|_{N_x^-})^{-1} h_1$, 则 $T_x^+ \in \mathscr{L}(Y, X), R(T_x^+) = N_x^-, N(T_x^+) = R_x^-, T_x^+$ 为 T_x 的广义逆. 特别 T_0 具有广义逆 T_0^+.

因为 T_x 在 x_0 处连续，不妨设 $\forall x \in V_0$, 引理 2.3.6 中的条件成立. 从而 $\forall x \in V_0$, $R(T_0 T_0^+ T_x) = R_0$, 于是，我们有

$$Y = R_0 \oplus R_0^- = R_x + R_0^- = R \dot{+} R_0^-,$$

这里 $R_x = R\dot{+}(R_x \cap R_0^-)$. 由此，导出 $R_x \cap R_0^- = \{\theta\}$. 注意到 $R_0^- = N(T_0^+)$, 从而 $R(T_x) \cap N(T_0^+) = \{\theta\}, \forall x \in V_0$ 成立，即 x_0 为 T_x 的精细点. □

定理 2.3.11 设 $T_x : \wedge \to \mathscr{L}(X,Y)$ 在 $x_0 \in X$ 处连续, $T_0 = T_{x_0}$ 有广义逆 $T_0^+ \in \mathscr{L}(Y,X)$. 则 T_x 在 x_0 处局部精细的充分必要条件为存在 x_0 的邻域 V_0, $\forall x \in V_0$, 有

$$(I - T_0^+ T_0)N(T_x) = N_0.$$

证明 因为 T_x 在 x_0 处连续，故存在 x_0 的领域 V_0 满足: $\forall x \in V_0$, 有

$$\|T_0^+\|\|T_x - T_0\| < [1 + \|I - T_0 T_0^+\|]^{-1}.$$

由定理 2.3.6 中 (1)⇔(2), 及引理 2.3.4 中 (2)⇔(3), 取 $\overline{T} = T_x$, $\delta T = T_x - T_0$, $T = T_0$, 立刻得到结论. □

§2.4　线性斜投影广义逆 $T_{P,Q}^+$ 在非线性分析中的应用

1. 局部线性化定理

定义 2.4.1 设 X, Y 为 Banach 空间, $U \subset X$ 为开集. $f : U \to Y$ 为 C^1 映射，如果存在 X 中 $x_0 \in U$ 的邻域 U_0 及 Y 中 θ 的邻域 V_0, 又存在映射 u 及 v 满足

(1) $u : U_0 \to u(U_0) \subset X$ 及 $v : V_0 \to v(V_0) \subset Y$ 为微分同胚，且 $u(x_0) = \theta, v(\theta) = f(x_0)$;

(2) $u'(x_0) = I, v'(\theta) = I$, $f(x) = (v \circ f'(x_0) \circ u)(x), x \in U_0$, 则称 f 在 x_0 处可局部线性化，或称 f 为在 x_0 附近局部共轭于 $f'(x_0)$.

引理 2.4.1 设 $T_x : \wedge \to \mathscr{L}(X,Y), \forall x \in \wedge, R_x = R(T_x), R_0 = R(T_{x_0}), N_0 = N(T_0), T_0 = T_{x_0}$ 具有广义逆 $T_0^+ \in \mathscr{L}(Y,X)$, 则存在 x_0 的邻域 U_0 及一族有界线性投影 $\{P_x\}_{x\in\wedge}$, 满足 $\forall x \in U_0, R(P_x) = N_x$, 且

$$\lim_{x \to x_0} P_x = I_X - T_0^+ T_0.$$

证明 设 $U_0 = \{x \in \wedge : \|T_x - T_0\| < [\|T_0^+\|]^{-1}\}$, 则 U_0 为 $\wedge$ 中开集.

如果 $R_x = R_0$, 则 $\forall x \in \wedge, T_0 T_0^+ T_x = T_x$, 从而 $\forall x \in U_0, T_x = T_0(I_X - T_0^+(T_0 - T_x))$, 于是，我们得到

$$N_x = (I_X - T_0^+(T_0 - T_x))^{-1} N_0, \forall x \in U_0,$$

从而对 $x \in U_0$. 令

$$S_x = (I_X - T_0^+(T_0 - T_x))^{-1}(I_X - T_0^+ T_0),$$

$$\widehat{S}_x = (I_X - T_0^+ T_0)(I_X - T_0^+(T_0 - T_x))^{-1}.$$

显然，$S_x, \widehat{S}_x \in \mathscr{L}(X)$ 且连续依赖于 x, 且 $P_x = S_x\widehat{S}_x$ 为 X 中有界线性投影，易知 P_x 关于 x 连续，□

定理 2.4.1 设 $T_x : \wedge \to \mathscr{L}(X,Y)$ 在 $x_0 \in \wedge$ 处局部精细，则存在 x_0 的领域 U_0 及一族有界线性投影 $\{P_x\}$, 满足 $R(P_x) = N_x$ 且

$$\lim_{x\to x_0} P_x = I_X - T_0^+T_0.$$

证明 因为 T_x 在 x_0 处为局部精细的，由定义 T_0^+ 存在，且 $T_0^+ \in \mathscr{L}(Y,X)$. 由引理 2.3.6, 存在 x_0 的邻域 U_0,$\forall x \in U_0, R(T_0T_0^+T_x) = R_0$. 令

$$S_x = T_0T_0^+T_x,\quad x \in U_0.$$

则 $S_0 = S_{x_0} = T_0, x \mapsto S_x$ 为连续的，且 $R(S_x) = R(S_0), S_0^+ = T_0^+ \in \mathscr{L}(Y,X)$, 由引理 2.4.1, 存在一族 X 中有界线性投影 P_x, 不妨设 $\forall x \in U_0, R(P_x) = N(S_x)$, 且

$$\lim_{x\to x_0} P_x = I_X - S_0^+S_0 = I_X - T_0^+T_0.$$

因此，只需证 $N(S_x) = N_x, x \in U_0$. 注意到 $N_x \subset N(S_x)$, 且

$$N(S_x) = N_x + \{u \in X : \widehat{T}_x[u] \in R_0^-\},$$

这里 $[u] \in X/N_x, \widehat{T}_x[u] = T_xu$ 且 $R_0^- = R(I_Y - T_0T_0^+)$. 因为 $R_x \cap R_0^- = R(T_x) \cap N(T_0^+) = \{\theta\}, \forall x \in U_0$, 从而

$$N(S_x) = N_x.$$ □

定理 2.4.2 设 $f : U \to Y$ 为 C^1 映射. 对 $x \in U$, 记 $T_x = f'(x), T_0 = f'(x_0), x_0 \in U_0$. 设 T_0 具有广义逆 $T_0^+ \in \mathscr{L}(Y,X)$. 则 f 在 x_0 处可局部线性化的充分必要条件为 T_x 在 x_0 处为局部精细的.

证明 必要性. 设 f 在 x_0 处可局部线性化，即存在两个微分同胚 $u : U_0 \to u(U_0) \subset X$ 及 $v : V_0 \to v(V_0) \subset Y$ 满足 $u(x_0) = \theta, u'(x_0) = I_X, v(\theta) = f(x_0), v'(\theta) = I_Y$, 且

$$f(x) = v(f'(x_0)u(x)), \forall x \in U_0,$$

从而有

$$f'(x) = v'(f'(x_0)u(x))f'(x_0)u'(x), \forall x \in U_0.$$

特别，有

$$f'(x_0) = v'(\theta)f'(x_0)u'(x_0).$$

令

$$S(x) := (u')^{-1}(x)T_0^+(v')^{-1}(f'(x_0)u(x)), x \in U_0,$$

则 $\forall x \in U_0$, 有

$$\begin{aligned} T_xS(x) &= f'(x)S(x) \\ &= v'(f'(x_0)u(x))f'(x_0)T_0^+(v')^{-1}(f'(x_0)u(x)), \end{aligned}$$

于是 $\forall x \in U_0$, 由 $f'(x_0)T_0^+f'(x_0) = f'(x_0)$, 有

$$\begin{aligned}
&T_xS(x)T_x \\
&= f'(x)S(x)f'(x) \\
&= v'(f'(x_0)u(x))f'(x_0)T_0^+(v')^{-1}(f'(x_0)u(x))v'(f'(x_0)u(x))f'(x_0)u'(x) \\
&= v'(f'(x_0)u(x))f'(x_0)T_0^+f'(x_0)u'(x) \\
&= v'(f'(x_0)u(x))f'(x_0)u'(x) \\
&= f'(x) = T_x.
\end{aligned}$$

同理

$$S(x)T_xS(x) = S(x).$$

因此

$$T_x^+ = S(x), \forall x \in U_0,$$

这里 T_x^+ 为 $T_x = f'(x)$ 的广义逆且

$$\lim_{x\to x_0} T_x^+ = \lim_{x\to x_0} S(x) = S(x_0).$$

由于

$$S(x_0) = (u')^{-1}(x_0)T_0^+(v')^{-1}(\theta),$$

故有

$$T_0^+ = u'(x_0)S(x_0)v'(\theta) = S(x_0),$$

于是

$$\lim_{x\to x_0} T_x^+ = T_0^+.$$

由引理 2.3.2 中 (2.3.13) 式，有

$$\delta(N(T_0), N(T_x)) \leqslant \|T_x^+\|\|T_x - T_0\|, x \in U_0.$$

因为 $\lim_{x\to x_0} T_x = T_0$ 且 $\lim_{x\to x_0} T_x^+ = T_0^+$, 所以 $\lim_{x\to x_0} \|T_x^+\|\|T_x - T_0\| = 0$. 不失一般性，设 $\forall x \in U_0$, 有

$$\delta(N(T_0), N(T_x)) < \|I - T_0T_0^+\|^{-1}.$$

再由定理 2.3.6 中 (1)$\Leftrightarrow$(4), 得知 $R(T_x) \cap N(T_0^+) = \{\theta\}, \forall x \in U_0$, 因此 x_0 为 T_x 的局部精细点.

充分性. 由定理 2.4.1, 存在 x_0 的邻域 U_0 及一族有界线性投影 P_x, 满足 $R(P_x) = N_x$ 对一切 $x \in U_0$ 成立，且

$$\lim_{x\to x_0} P_x = I_X - T_0^+T_0, \tag{2.4.1}$$

这里 $T_0 = f'(x_0)$.

定义

$$u(x) = T_0^+(f(x) - f(x_0)) + (I_X - T_0^+T_0)(x - x_0),\ x \in U_0.$$

则 $u(x_0) = \theta, u'(x_0) = I_X$.

我们将证明下述结果:

(i) 存在 X 中开球 $B_X(\theta, r)$ 满足

$$u : u^{-1}(B_X(\theta, r)) \to B_X(\theta, r)\text{为微分同胚}, \tag{2.4.2}$$

$$N_y = (u'(y))^{-1}N_0,\ \forall y \in u^{-1}(B_X(\theta, r)), \tag{2.4.3}$$

(ii) 在 $u^{-1}(B_X(\theta, r))$ 中存在 $B_X(x_0, \rho)$ 满足

$$T_0^+(f(x) - f(x_0)) \in B_X(\theta, r), \forall x \in B_X(x_0, \rho), \tag{2.4.4}$$

$$u : B_X(x_0, \rho) \to u(B_X(x_0, \rho)) \tag{2.4.5}$$

为微分同胚，且

$$\begin{aligned}&(f \circ u^{-1})(T_0^+(f(x) - f(x_0)) + (I_X - T_0^+T_0)(x - x_0))\\ =\ &(f \circ u^{-1})(T_0^+(f(x) - f(x_0)), \forall x \in B_X(x_0, \rho);\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

(iii) 存在开球 $B_Y(\theta, l)$ 满足

$$T_0^+ x \in u(B_X(x_0, \rho)), \forall x \in B_Y(\theta, l). \tag{2.4.7}$$

事实上, 由 $u(x_0) = \theta, u'(x_0) = I_X$, 应用反函数定理, 得 (2.4.2). 由 $B_X(x_0, \rho) \subset u^{-1}(B_X(\theta, r))$, 则 (2.4.5) 是 (2.4.2) 的直接结果.

现证 (2.4.3), 对 $u(y)$ 微分，有

$$u'(y) = T_0^+f'(y) + (I_X - T_0^+T_0) = T_0^+T_y + (I_X - T_0^+T_0).$$

由此导出: $\forall y \in u^{-1}(B_X(\theta, r))$, $u'(y)N_y = (I_X - T_0^+T_0)N_y$. 由 (2.4.1), 存在含于 $u^{-1}(B_X(\theta, r))$ 中 x_0 的邻域，不失一般性，仍记为 $u^{-1}(B_X(\theta, r))$, 使得

$$\|P_y - (I_X - T_0^+T_0)\| < 1,\ \forall y \in u^{-1}(B_X(\theta, r)),$$

则 (见 [Ka] p.34)

$$R((I_X - T_0^+T_0)P_y) = R(I_X - T_0^+T_0) = N_0.$$

因此 $\forall y \in u^{-1}(B_X(\theta, r)), u'(y)N_y = (I_X - T_0^+T_0)N_y = N_0$.

由 $T_0^+(f(x) - f(x_0))$ 在 x_0 处的连续性， (2.4.4) 立刻被导出.

因为 $T_0^+\theta = \theta \in u(B_X(x_0, \rho))$, 再由 T_0^+ 为连续线性算子，得到 (2.4.7).

最后证 (2.4.6).

令 $y_1 = T_0^+(f(x) - f(x_0))$, 且 $y_2 = y_1 + (I_X - T_0^+T_0)(x - x_0)$ (即 $y_2 = u(x)$). 由 (2.4.4) 及 (2.4.5) 并注意 $B_X(x_0,\rho) \subset u^{-1}(B_X(\theta,r))$, 我们知道: $\forall x \in B_X(x_0,\rho), y_1, y_2 \in B_X(\theta,r)$. 从而 $\forall t \in [0,1], x \in B_X(x_0,\rho)$, 有

$$ty_1 + (1-t)y_2 = y_1 + (1-t)(I_X - T_0^+T_0)(x - x_0) \in B_X(\theta,r).$$

定义 $\Phi(\cdot) : [0,1] \to Y$ 为

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= (f \circ u^{-1})(y_1 + (1-t)(I_X - T_0^+T_0)(x - x_0)) \\ &= (f \circ u^{-1})(ty_1 + (1-t)y_2), t \in [0,1].\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(t) = (f' \circ u^{-1})(ty_1 + (1-t)y_2) \\ (u')^{-1} \circ u^{-1}(ty_1 + (1-t)y_2)(T_0^+T_0 - I_X)(x - x_0).\end{aligned}$$

注意到 $R(T_0^+T_0 - I_X) = N_0$, 由 (2.4.3) 有 $\frac{d}{dt}\Phi(t) = 0, \forall t \in [0,1]$, 于是 $\Phi(0) = \Phi(1)$. 故 (2.4.6) 成立.

由 (2.4.7) 及 (2.4.5), 定义

$$v(x) = (f \circ u^{-1} \circ T_0^+)(x) + (I_Y - T_0T_0^+)x, \ x \in B_Y(\theta,l).$$

显然, $v(\theta) = f(x_0)$, 且

$$\begin{aligned}v'(\theta) &= T_0 \circ (u^{-1})'(\theta) \circ T_0^+ + (I_Y - T_0T_0^+) \\ &= T_0T_0^+ + (I_X - T_0T_0^+) = I_Y.\end{aligned}$$

由反函数定理, 存在开球 $B_Y(\theta,m), 0 < m < l$, 使得

$$v : B_Y(\theta,m) \to v(B_Y(\theta,m)) \tag{2.4.8}$$

为微分同胚. 由于 T_0 的连续性, 存在开球 $B_X(x_0,q) \subset B_X(x_0,\rho)$ 满足

$$T_0x \in B_Y(\theta,m), \ \forall x \in u(B_X(x_0,q)), \tag{2.4.9}$$

因为 $B_X(x_0,q) \subset B_X(x_0,\rho)$, 从而在 $B_X(x_0,q)$ 内, (2.4.5) 与 (2.4.6) 仍成立. 于是

$$\begin{aligned}f(x) &= (f \circ u^{-1} \circ u)(x) \\ &= (f \circ u^{-1})(T_0^+(f(x) - f(x_0)) + (I_X - T_0^+T_0)(x - x_0)) \\ &= (f \circ u^{-1})(T_0^+(f(x) - f(x_0))), \forall x \in B_X(x_0,q).\end{aligned}$$

由 (2.4.9),(2.4.8) 及 $B_Y(\theta,m) \subset B_Y(\theta,l), (v \circ T_0 \circ u)(x)$ 对每个 $x \in B_X(x_0,q)$ 是确定的, 我们有

$$
\begin{aligned}
&(v \circ T_0 \circ u)(x)\\
&= (v \circ T_0)[(T_0^+(f(x) - f(x_0))) + (I_X - T_0^+T_0)(x - x_0)]\\
&= v(T_0T_0^+(f(x) - f(x_0)))\\
&= (f \circ u^{-1})(T_0^+T_0T_0^+(f(x) - f(x_0)))\\
&\quad + (I_Y - T_0T_0^+)(T_0T_0^+(f(x) - f(x_0)))\\
&= (f \circ u^{-1})(T_0^+(f(x) - f(x_0))), \quad \forall x \in B_X(x_0, q).
\end{aligned}
$$

将上述两个结果结合，得

$$f(x) = (v \circ f'(x_0) \circ u)(x), \quad \forall x \in B_X(x_0, q).$$

由 (2.4.8) 及 (2.4.5), 取 $U = B_X(x_0,q), V = B_Y(\theta,m)$, 知 $u: U \to u(U)$ 及 $v: V \to v(V)$ 均为微分同胚. □

2. 退化解的局部分歧性定理

设 X,Y 为 Banach 空间， $f: X \times R \to Y$ 为非线性可微映射， (x_0,λ_0) 为 $f(x,\lambda)=\theta$ 的解. 如果 $f_x(x_0,\lambda_0)$ 为拓扑同构 (即 (x_0,λ_0) 为非退化解), 由隐函数存在定理, 当 λ 充分接近 λ_0 时, $f(x,\lambda)=\theta$ 有唯一解 $(x(\lambda),\lambda)$, 且 $x(\lambda)$ 关于 λ 连续可微. 因此 λ_0 为分歧点仅当 $f_x(x_0,\lambda_0)$ 为奇异算子时. 如果 (x_0,λ_0) 为 $f(x,\lambda)=\theta$ 的解且 $N(f_x(x_0,\lambda_0)) \neq \{\theta\}$, 则称 (x_0,λ_0) 为退化解. 最常见的情形为 0 是 $f_x(x_0,\lambda_0)$ 的单重特征值, 即

(F$_1$) $\dim N(f_x(x_0,\lambda_0)) = \mathrm{codim} R(f_x(x_0,\lambda_0)) = 1$, 且

$$N(f_x(x_0,\lambda_0)) = \mathrm{span}\{\omega_0\},$$

这里 $N(f_x(x_0,\lambda_0))$ 与 $R(f_x(x_0,\lambda_0))$ 为 $f_x(x_0,\lambda_0)$ 的零空间与值域.

M. G. Crandall 与 P. H. Rabinnowicz 在条件 (F$_1$) 下证得两个局部分歧定理 ([CR1] 中定理 1.7, [CR2] 中定理 3.2). 但他们又给出 $\dim N(f_x(x_0,\lambda_0)) = 2$ 的例子. 现假设

(F$_2$) $\dim N(f_x(x_0,\lambda_0)) \geqslant \mathrm{codim} R(f_x(x_0,\lambda_0)) = 1$. 应用算子广义逆与隐函数定理, 证得上述两个定理的结果.

定义 2.4.2 设 X,Y 为 Banach 空间, $V \subset X \times R$ 为开集, $f \in C^p(V,Y), p \geqslant 0$. 假定在 (x_0,λ_0) 的邻域内存在 $f(x,\lambda)=\theta$ 的平凡解 $(x(\lambda),\lambda)$, 满足 $(x(\lambda),\lambda) \to (x_0,\lambda_0)$. 如果存在序列 $\{(x_n,y_n)\} \subset V$ 满足

(i) $(x_n,y_n) \to (x_0,\lambda_0)(n \to \infty), x_n \neq x(\lambda_n)(n=1,2,\cdots)$;

(ii) $f(x_n,y_n) = \theta(n=1,2,\cdots)$,

则称 (x_0,λ_0) 为方程 $f(x,\lambda)=\theta$ 的一个分歧点.

定理 2.4.3 设 X,Y 为 Banach 空间, $\lambda_0 \in R, V \subset X \times R$ 为 (θ,λ_0) 的邻域, $f \in C^1(V,Y)$. 假定

(1) $f(\theta,\lambda)=\theta,\forall\lambda\in(\lambda_0-\delta,\lambda_0+\delta)$;

(2) $f_x(\theta,\lambda_0):X\to Y$ 具有有界广义逆 $(f_x(\theta,\lambda_0))^+$, 且

$$\dim N(f_x(\theta,\lambda_0))\geqslant \operatorname{codim}R(f_x(\theta,\lambda_0))=1;$$

(3) 在 V 内 $f_{x\lambda}(x,\lambda)$ 存在且连续;

(4) 存在 $w_0\in N(f_x(\theta,\lambda_0))\backslash\{\theta\}$, 使 $f_{x\lambda}(\theta,\lambda_0)w_0\notin R(f_x(\theta,\lambda_0))$. 设 $Z=R((f_x(\theta,\lambda_0))^+)$, 则

(i) 存在一个开区间 $I=(-\epsilon,\epsilon)$, C^1 函数 $\lambda(\cdot):I\to R$, 及 C^1 抽象函数 $z(\cdot):I\to Z$ 满足 $\lambda(0)=\lambda_0, z(\theta)=\theta$. 如果 $x(s)=sw_0+z(s),\ \ s\in I$, 有

$$f(x(s),\lambda(s))=\theta\ ,s\in I.$$

(ii) $V\cap f^{-1}(\theta)$ 中包含曲线 $(\theta,\lambda(s))$ 与 $(x(s),\lambda(s))$, $s\in I$, 且 (θ,λ_0) 为 $f(x,\lambda)=\theta$ 的分歧点.

(iii) 如果 f 为 C^2 映射, 则存在 $l\in N((f_x(\theta,\lambda_0))^*)\subset Y^*$ 使得

$$\lambda'(0)=-\frac{\langle l,f_{xx}(\theta,\lambda_0)\rangle[w_0,w_0]}{2\langle l,f_{x\lambda}(\theta,\lambda_0)w_0\rangle},$$

这里 $(f_x(\theta,\lambda_0))^*$ 为 $f_x(\theta,\lambda_0)$ 的共轭算子.

证明　(i) 对于给定的 $w_0\in N(f_x(\theta,\lambda_0))\backslash\{\theta\}$, 定义

$$g(z,\lambda,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{s}f(sw_0+z,\lambda), s\neq 0;\\ f_x(\theta,\lambda_0)(w_0+z), s=0,\end{cases}\tag{2.4.10}$$

这里 $(z,\lambda,s)\in Z\times R\times R$.

经直接计算, 得到 $g(\theta,\lambda_0,0)=\theta$ 且 $g(z,\lambda,s)$ 关于 $(z,\lambda,s)\in Z\times R\times R$ 为连续可微的. 下证 $g_{(z,\lambda)}(\theta,\lambda_0,0):Z\times R\to Y$ 为正则算子.

首先断言: $\forall(\psi,\tau)\in Z\times R$, 有

$$g_{(z,\lambda)}(\theta,\lambda_0,0)(\psi,\tau)=f_x(\theta,\lambda_0)\psi+\tau f_{x\lambda}(\theta,\lambda_0)w_0.\tag{2.4.11}$$

事实上, 由 (2.4.10) 及 Fréchet 导算子的定义, 有

$$\begin{aligned}&g_{(z,\lambda)}(\theta,\lambda_0,0)(\psi,\tau)\\=&\lim_{t\to0}\frac{g(\theta+t\psi,\lambda_0+t\tau,0)-g(\theta,\lambda_0,0)}{t}\\=&\lim_{t\to0}\frac{f_x(\theta,\lambda_0+t\tau)(w_0+t\psi)-f_x(\theta,\lambda_0)w_0}{t}\\=&\lim_{t\to0}f_x(\theta,\lambda_0+t\tau)\psi+\lim_{t\to0}\frac{f_x(\theta,\lambda_0+t\tau)w_0-f_x(\theta,\lambda_0)w_0}{t}\\=&f_x(\theta,\lambda_0)\psi+\tau f_{x\lambda}(\theta,\lambda_0)w_0.\end{aligned}$$

下面证 $g_{(z,\lambda)}(\theta,\lambda_0,0)$ 为单射.

假定 $(\psi,\tau)\in Z\times R$, 满足

$$g_{(z,\lambda)}(\theta,\lambda_0,0)(\psi,\tau)=\theta,$$

由 (2.4.11), 有

$$f_x(\theta,\lambda_0)\psi+\tau f_{x\lambda}(\theta,\lambda_0)w_0=\theta. \tag{2.4.12}$$

由于 $f_x(\theta,\lambda_0)$ 具有有界广义逆, 故 $R(f_x(\theta,\lambda_0))$ 为闭的, 由 Banach 闭值域定理 (见 [Yo]), 有 $N((f_x(\theta,\lambda_0))^*)=R(f_x(\theta,\lambda_0))^\perp$. 取 $l\in N((f_x(\theta,\lambda_0))^*)=R(f_x(\theta,\lambda_0))^\perp$, 且 $l\neq\theta$. 以 l 作用于 (2.4.12), 得

$$\tau\langle l,f_{x\lambda}(\theta,\lambda_0)w_0\rangle=0.$$

因为 $f_{x\lambda}(\theta,\lambda_0)w_0\notin R(f_x(\theta,\lambda_0))$, 所以 $\langle l,f_{x\lambda}(\theta,\lambda_0)\rangle\neq 0$, 于是 $\tau=0$, 且 $f_x(\theta,\lambda_0)\psi=\theta$. 因此 $\psi\in N(f_x(\theta,\lambda_0))$. 又因为 $\psi\in Z=R((f_x(\theta,\lambda_0))^+)$, 从而 $\psi=\theta$. 因此 $g_{(z,\lambda)}(\theta,\lambda_0,0)$ 为单射.

下面证 $g_{(z,\lambda)}(\theta,\lambda_0,0)$ 为满射.

对任意 $y\in Y$, 令

$$\tau=\frac{\langle l,y\rangle}{\langle l,f_{x\lambda}(\theta,\lambda_0)w_0\rangle},$$

$$\psi=(f_x(\theta,\lambda_0))^+[y-\tau f_{x\lambda}(\theta,\lambda_0)w_0].$$

则 $(\psi,\tau)\in Z\times R$. 由 (2.4.11), 得

$$\begin{aligned}&g_{(z,\lambda)}(\theta,\lambda_0,0)(\psi,\tau)\\&=f_x(\theta,\lambda_0)\psi+\tau f_{x\lambda}(\theta,\lambda_0)w_0\\&=f_x(\theta,\lambda_0)(f_x(\theta,\lambda_0))^+[y-\tau f_{x\lambda}(\theta,\lambda_0)w_0]+\tau f_{x\lambda}(\theta,\lambda_0)w_0.\end{aligned} \tag{2.4.13}$$

由条件 $f_{x\lambda}(\theta,\lambda_0)w_0\notin R(f_x(\theta,\lambda_0))$ 且 $\mathrm{codimR}(f_x(\theta,\lambda_0))=1$, 则 y 有唯一分解:

$$y=y_1+tf_{x\lambda}(\theta,\lambda_0)w_0, \tag{2.4.14}$$

这里 $y_1\in R(f_x(\theta,\lambda_0))$.

用 l 作用于 (2.4.14) 的两边, 有

$$t=\frac{\langle l,y\rangle}{\langle l,f_{x\lambda}(\theta,\lambda_0)w_0\rangle}=\tau, \tag{2.4.15}$$

因而由 (2.4.14) 及 (2.4.15), 有

$$y-\tau f_{x\lambda}(\theta,\lambda_0)w_0=y_1\in R(f_x(\theta,\lambda_0)). \tag{2.4.16}$$

由于 $f_x(\theta,\lambda_0)(f_x(\theta,\lambda_0))^+$ 为从 Y 到 $R(f_x(\theta,\lambda_0))$ 上的有界线性投影. 由 (2.4.13) 及 (2.4.16), 得

$$g_{(z,\lambda)}(\theta,\lambda_0,0)(\psi,\tau)=y,$$

即 $g_{(z,\lambda)}(\theta,\lambda_0,0)(\psi,\tau):Z\times R\to Y$ 为一对一的满射. 由 Banach 逆算子定理, $g_{(z,\lambda)}(\theta,\lambda_0,0):Z\times R\to Y$ 为正则算子.

对算子方程 $g(z,\lambda,s)=\theta$, 应用隐函数定理, 存在 0 的 ε 邻域 $I=(-\varepsilon,\varepsilon)$, 连续函数 $\lambda(\cdot):I\to R$ 满足 $|\lambda(s)|<\delta,s\in I$ 及连续的抽象函数 $z(\cdot):I\to Z$ 使得 $(z(0),\lambda(0))=(\theta,\lambda_0)$, 且对任意 $s\in I$, 有

$$g(z(s),\lambda(s),s)=\theta. \tag{2.4.17}$$

由 $g(z,\lambda,s)$ 的定义, 令 $x(s)=sw_0+z(s),s\in I$, 则

$$f(x(s),\lambda(s))=\theta,$$

于是有 (i).

(ii) 仅需要证 (θ,λ_0) 为 $f(x,\lambda)=\theta$ 的分歧点. 由 $f(\theta,\lambda(s))=\theta,s\in I$ 可知 $(x(s),\lambda(s))_{s\in I}$ 为 $f(x,\lambda)=\theta$ 的平凡解, 其中 $x(s)\equiv\theta,s\in I$.

由 (i), $\lambda(0)=\lambda_0,z(0)=\theta$ 且 $\lambda(s),z(s)$ 在 I 上连续. 从而 $\lim_{s\to 0}\lambda(s)=\lambda_0,\lim_{s\to 0}z(s)=\theta$. 当 $s\neq 0$ 时, 有 $x(s)=sw_0+z(s)\neq\theta$, 且 $f(x(s),\lambda(s))=\theta$. 事实上, 假如有 $s\neq 0$, 使

$$x(s)=sw_0+z(s)=\theta,$$

则 $z(s_0)=-sw_0\in N(f_x(\theta,\lambda_0))\cap Z$, 但 $Z=R(f_x(\theta,\lambda_0)^+)$ 为 $N(f_x(\theta,\lambda_0))$ 的拓扑补空间, 从而 $z(s_0)=\theta$, 于是 $w_0=\theta$, 此为矛盾.

由定义 2.4.2,(θ,λ_0) 为 $f(x,\lambda)=\theta$ 的分歧点.

(iii) 对方程 $g(z(s),\lambda(s),s)=\theta(s\in I)$ 两边关于 $s=0$ 求导, 得到

$$\begin{aligned}\theta&=\frac{d}{ds}g(z(s),\lambda(s),s)|_{s=0}\\&=\frac{1}{2}f_{xx}(\theta,\lambda_0)[w_0,w_0]+\lambda'(0)f_{x\lambda}(\theta,\lambda_0)w_0+f_x(\theta,\lambda_0)z'(0).\end{aligned} \tag{2.4.18}$$

用 l 作用于 (2.4.18) 的两边, 有

$$0=\frac{1}{2}\langle l,f_{xx}(\theta,\lambda_0)[w_0,w_0]\rangle+\lambda'(0)\langle l,f_{x\lambda}(\theta,\lambda_0)w_0\rangle,$$

于是

$$\lambda'(0)=-\frac{\langle l,f_{x\lambda}(\theta,\lambda_0)[w_0,w_0]\rangle}{2\langle l,f_{x\lambda}(\theta,\lambda_0)w_0\rangle}.$$ □

定理 2.4.4　设 $V\subsetneq X\times R$ 为 (x_0,λ_0) 的邻域, $f\in C^1(V,Y)$. 假定:

(i) $f(x_0,\lambda)=\theta$, $\lambda\in(\lambda_0-\delta,\lambda_0+\delta)$;

(ii) $f_x(x_0,\lambda_0)$ 具有广义逆 $(f_x(x_0,\lambda_0))^+\in\mathscr{L}(Y,X)$, 且

$$\dim N(f_x(x_0,\lambda_0))\geqslant\operatorname{codim}R(f_x(x_0,\lambda_0))=1;$$

(iii) $f_\lambda(x_0,\lambda_0)\notin R(f_x(x_0,\lambda_0))$.

设 $Z=R((f_x(x_0,\lambda_0))^+)$, 则

(1) 对于每个 $w_0\in N(f_x(x_0,\lambda_0))\backslash\{\theta\}$, 存在 0 的 ε 邻域 $I=(-\varepsilon,\varepsilon)$, 连续可微函数 $\lambda(\cdot):I\to R,\lambda(0)=\lambda_0,\lambda'(0)=0$ 及连续可微的抽象函数 $z(\cdot):I\to Z$, 使得流形 $\{(x,\lambda)|f(x,\lambda)=\theta\}$ 包含曲线 $(x(s),\lambda(s))_{s\in I}$, 其中 $x(s)=x_0+sw_0+z(s),s\in I$;

(2) (x_0,λ_0) 为 $f(x,\lambda)=\theta$ 的分歧点;

(3) 如果 $f\in C^2(V,Y)$, 则 $\lambda(s),z(s)$ 为 2 次可微的, 且

$$\lambda''(0)=-\frac{\langle l,f_{xx}(x_0,\lambda_0)[w_0,w_0]\rangle}{\langle l,f_\lambda(x_0,\lambda_0)\rangle},$$

这里 $l\in N((f_x(x_0,\lambda_0))^*)\backslash\{\theta\}$.

证明 (1) 任取 $w_0\in N(f_x(x_0,\lambda_0))\backslash\{\theta\}$, 定义 $G:(Z\times R)\times R\to Y$ 为

$$G(z,\lambda,s)=f(x_0+sw_0+z,\lambda)-f(x_0,\lambda_0).$$

则 $G(\theta,\lambda_0,0)=\theta$.

用定理 2.4.3 类似的证明, 得

$$G_{(z,\lambda)}(\theta,\lambda_0,0)(\psi,\tau)=f_x(x_0,\lambda_0)\psi+\tau f_\lambda(x_0,\lambda_0),$$

且 $G_{(z,\lambda)}(\theta,\lambda_0,0):(Z\times R)\times R\to Y$ 为正则算子. 由隐函数定理, 存在 $\varepsilon>0,I=(-\varepsilon,\varepsilon)$, 及 $\lambda(\cdot):I\to R$ 满足 $|\lambda(s)-\lambda_0|<\delta,\forall s\in I$; 又存在 $z(\cdot):I\to Z,(z(s),\lambda(s))$ 在 $I=(-\varepsilon,\varepsilon)$ 内连续可微且 $z(0)=\theta$, 满足

$$G(z(s),\lambda(s),s)=\theta,\quad \forall s\in I.$$

于是

$$f(x_0+sw_0+z(s),\lambda(s))=\theta,\quad \forall s\in I.$$

从而流形 $\{(x,\lambda)|\ f(x,\lambda)=\theta\}$ 包含曲线

$$(x(s),\lambda(s))=(x_0+sw_0+z(s),\lambda(s)),\quad s\in I.$$

将 $G(z,\lambda,s)=\theta$ 关于 s 微分, 得

$$G_{(z,\lambda)}(z,\lambda,s)[\lambda'(s),z'(s)]+G_s(z,\lambda,s)=\theta.$$

令 $s=0$, 得

$$G_{(z,\lambda)}(\theta,\lambda_0,0)[\lambda'(0),z'(0)]=-G_s(\theta,\lambda_0,0)=-f_x(x_0,\lambda_0)w_0=\theta.$$

由于 $G_{(z,\lambda)}(\theta,\lambda,0)$ 为正则算子, 则 $\lambda'(0)=0,z'(0)=\theta$. 于是 (1) 成立.

(2) 因为由 (i), 有

$$f(x_0,\lambda(s))=\theta,s\in I.$$

令 $x(s)\equiv x_0,s\in I$, 则 $(x(s),\lambda(s))$ 为 $f(x,\lambda)=\theta$ 在 $s\in I$ 上的平凡解.

设 $\overline{x}(s) = x_0 + sw_0 + z(s), s \in I$, 则当 $s \to 0$ 时, $\overline{x}(s) \to x_0, \lambda(s) \to \lambda_0$. 用定理 2.4.3 的类似证明, 有 $\overline{x}(s) \neq x_0, \forall s \in I\backslash\{0\}$ 且 $f(\overline{x}(s), \lambda(s)) = \theta, \forall s \in I$. 于是 (x_0, λ_0) 为 $f(x, \lambda) = \theta$ 的分歧点, 故 (2) 成立.

(3) 对方程 $f(x(s), \lambda(s)) = \theta$ 两边关于 s 微分, 得

$$f_x(x(s), \lambda(s))x'(s) + f_\lambda(x(s), \lambda(s))\lambda'(s) = \theta. \tag{2.4.19}$$

对 (2.4.19) 再次微分, 得

$$\begin{aligned} &f_{xx}[x'(s), x'(s)] + f_x x''(s) + f_{x\lambda}\lambda'(s)x'(s) + f_\lambda \lambda''(s) \\ &+ f_{\lambda x}x'(s)\lambda'(s) + f_{\lambda\lambda}(\lambda'(s))^2 = \theta. \end{aligned}$$

取 $s = 0$. 注意 $\lambda'(0) = 0$, 则

$$f_\lambda \lambda''(0) + f_x x''(0) + f_{xx}[w_0, w_0] = \theta. \tag{2.4.20}$$

取 $l \in N((f_x(x_0, \lambda_0))^*) = R(f_x(x_0, \lambda_0))^\perp$, 作用在 (2.4.20) 的两端, 有

$$\lambda''(0)\langle l, f_\lambda(x_0, \lambda_0)\rangle + \langle l, f_{xx}(x_0, \lambda_0)[w_0, w_0]\rangle = 0.$$

于是由条件 (iii), 有

$$\lambda''(0) = -\frac{\langle l, f_{xx}(x_0, \lambda_0)[w_0, w_0]\rangle}{\langle l, f_\lambda(x_0, \lambda_0)\rangle}.$$

从而 (3) 成立. □

§2.5 线性斜投影广义逆 $T_{P,Q}^+$ 在 C^k-Banach 流形中的应用

1. Banach 流形的基本知识

定义 2.5.1 设 M 为拓扑空间, $U \subset M$ 为 M 中开集, $\varphi: U \to U_\varphi$ 为同胚, 这里 U_φ 为 Banach 空间 X_φ 中的开集, (U, φ) 称为 M 的一个坐标.

Banach 空间 X_φ 称为坐标空间, φ 称为坐标映射. 对 $x \in U$,

$$x_\varphi = \varphi(x)$$

称为 x 在坐标 (U, φ) 中的表现或 x 在局部坐标系中的局部坐标.

$x \in M$ 关于两个不同的坐标 (U, φ) 和 (V, ψ) 可以有不同的局部坐标 $x_\varphi = \varphi(x)$ 和 $x_\psi = \psi(x)$, 其变换规则为

$$x_\varphi = \varphi(\psi^{-1}(x_\psi)) \text{ 且 } x_\psi = \psi(\varphi^{-1}(x_\varphi)).$$

定义 2.5.2 设 M 为拓扑空间, 两个坐标 (U, φ) 与 (V, ψ) 称为 C^k 相容的, 是指 $U \cap V = \varnothing$ 或 $\varphi \circ \psi^{-1}$ 与 $\psi \circ \varphi^{-1}$ 均为 C^k 映射.

显然

$$\varphi\circ\psi^{-1}:\ \psi(U\cap V)\to\varphi(U\cap V),$$

且

$$\psi\circ\varphi^{-1}:\ \varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V).$$

定义 2.5.3 设 M 为拓扑空间, M 的 C^k 坐标系是一族满足下列条件的坐标 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\wedge}$:

(i) $\cup_{\alpha\in\wedge}U_\alpha\supset M$;

(ii) 任两个坐标是 C^k 相容的;

(iii) 所有的坐标空间 X_φ 为 Banach 空间.

一个坐标 (U,φ) 如与坐标系中任一坐标均相容, 则称为允许坐标.

如果 M 具有 C^k 坐标系, 则称 M 为 C^k-Banach 流形, 如果所有的坐标空间 X_φ 均等于固定 Banach 空间 X, 则称 M 为装备于 X 上的 C^k-Bnanch 流形.

X 的维数 $d(0\leqslant d\leqslant\infty)$ 叫做 Bnanch 流形 M 的维数. C^0-Bnanch 流形又叫拓扑流形.

定义 2.5.4 设 M,N 为 C^k-Bnanch 流形 $(k\geqslant 1)$. $f:M\to N$ 称为 C^k 的, 是指 $\forall x\in M$ 及 M 中坐标 $(U,\varphi),N$ 中坐标 (V,ψ), 使 $x\in U,f(x)\in V,f$ 的表现 $\widetilde{f}$:

$$\widetilde{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\ X\to Y \tag{2.5.1}$$

在 $x_\varphi=\varphi(x)$ 点为 C^k 的.

f 称为 C^k 微分同胚, 是指 f 为双射, 且 f 与 f^{-1} 均为 C^k 的.

设 M 为 C^k-Bnanch 流形, 一个 M 中过 $x\in M$ 的 C^1 曲线 $x=x(t)$ 是一个满足 $x(t_0)=x$ 的 C^1 映射 $x(\cdot):\ U(t_0)\subseteq R\to M$. 此曲线在坐标 (U,φ) 中的表现为

$$x_\varphi=x_\varphi(t)=\varphi(x(t)).$$

在对应的坐标空间中, 这条曲线在 x 具有具体的切向量:

$$v_\varphi=x'_\varphi(t_0).$$

定义 2.5.5 设 M 为 C^k-Bnanch 流形, $k\geqslant 1,x\in M$. M 中过 x 点的两条 C^1 曲线在 x 点是等价的, 是指这两条曲线在某固定的允许坐标中的表现在 x_φ 点有同一切向量.

M 在 x 点的切向量 v 是在 x 点的 C^1 曲线等价类.

定义 2.5.6 设 M 为 C^k-Bnanch 流形 $(k\geqslant 1)$, M 在 x 点的切空间 TM_x 就是 M 在 x 点所有切向量的集合.

TM_x 为与坐标空间 X_φ 线性同胚的拓扑线性空间. $\dim TM_x=\dim X_\varphi$.

定义 2.5.7 设 M 为 C^k-Bnanch 流形, $k\geqslant 0.M$ 的一个子集 S 称为 M 的一个子流形, 是指: 对每个点 $x\in S$, 存在 M 中一个满足 $x\in U$ 的允许坐标 (U,φ), 使得下述条件成立:

(i) 坐标空间 X_φ 中有闭子空间 Y_φ,Y_φ 在 X_φ 中拓扑可补;

(ii) 坐标像 $\varphi(S\cap U)$ 为 Y_φ 中开集.

2. 在 Banach 空间之间构造 Banach 子流形的广义原像定理

设 X,Y 为 Banach 空间, U 为 X 中开集, $f:U\to Y$ 为 C^1 映射. 点 $x\in U$ 叫做 f 的正则点, 是指 f 在 x 点为浸没 ($f'(x)$ 为满射). 点 $y\in Y$ 称为 f 的正则值, 是指 $S=f^{-1}(y)$ 为空集或仅由正则点组成. 有著名的原像定理: 设 $f:U\subset X\to Y$ 为 C^1 映射, $y\in Y$ 为 f 的正则值, 则 $S=f^{-1}(y)$ 为 U 的 C^1- 子流形 (见 [Ze],IV). 现将上面结果进行推广.

定义 2.5.8 设 $f:U\subset X\to Y$ 为 C^1- 映射, 点 $x\in U$ 叫 f 的局部精细点, 是指 $f'(x)$ 在 x 点为局部精细的.

定义 2.5.9 设 f 如上, $y\in Y$ 称为 f 的广义正则值, 是指 $S=f^{-1}(y)$ 为空集或仅由 f 的局部精细点组成.

定理 2.5.1 设 $f:U\subset X\to Y$ 为 C^1- 映射, U 为 X 中开集. 如果 $y\in Y$ 为 f 的广义正则值, 则 $S=f^{-1}(y)$ 为中 U 子流形, 且对 $x\in S$,

$$TS_x=N(f'(x))$$

为 S 在 x 点的切空间.

证明 如 S 为空集, 无须证. 现设 $S=f^{-1}(y)\neq\varnothing$. 由定义 2.5.7 、定义 2.5.8, $f'(\cdot):\ U\subset X\to\mathscr{L}(X,Y)$ 在每点 $z\in S$ 为局部精细的. 由定理 2.4.2,f 在 z 处可局部线性化, 从而有 z 的邻域 $U(z)$ 及 θ 的邻域 $V(\theta)$, 且存在两个微分同胚 $\varphi_z:U(z)\to\varphi_z(U_z)$ 及 $\psi_y:V(\theta)\to\psi_y(V(\theta))$, 使 $\varphi_z(z)=\theta,\psi_y(\theta)=y$, 且

$$f(x)=\psi_y(f'(z)\varphi_z(x)),x\in U(z).$$

显然, $(U(z),\varphi_z)$ 为 U 在 $z\in S$ 处的允许坐标. 于是 $x\in S\cap U(z)$ 当且仅当

$$f'(z)\varphi_z(x)=\theta,$$

即 $\varphi_z(S\cap U(z))=N(f'(z))\cap\varphi_z(U(z))$.

显然, $N(f'(z))$ 为 S 在 z 处的坐标空间, 且 $\varphi_z(S\cap U(z))$ 为 $N(f'(z))$ 中开集.

由于 f 在 z 处为局部精细的, 从而 $(f'(z))^+$ 存在且 $(f'(z))^+\in\mathscr{L}(Y,X)$, 因此 $N(f'(z))\subset X$ 为拓扑可补的闭子空间, 而 X 为 U 在 z 处的坐标空间.

由定义 2.5.6, S 为 U 的 Banach 子流形.

下面证 $TS_x=N(f'(z))$.

S 本身亦为 C^1- 流形, 事实上, $(U(z)\cap S,\varphi_z|_{U(z)\cap S})_{z\in S}$ 构成 S 的坐标系, 其坐标空间为 $N(f'(z))$.

设 $x(t)$ 为满足 $x(0)=z\in U(z)$ 的 S 中 C^1 曲线, 则

$$\theta=\frac{d}{dt}(f\circ x)(t)$$

$$= \psi'_y(f'(z))\varphi_z(x(t))f'(z)\varphi'_z(x(t))\dot{x}(t),$$

从而在 $t=0$ 处，有

$$\varphi'_z(z)\dot{x}(0) \in N(f'(z)),$$

即

$$\dot{x}(0) \in (\varphi'_z(z))^{-1}N(f'(z)).$$

因为微分同胚 $\varphi_z(x)$ 在 z 附近可取为

$$\varphi_z(x) = T_z^+(f(x)-f(z)) + (I - T_z^+ f'(z))(x-z)$$

(见定理 2.4.2 的证明), 从而

$$\varphi'_z(x) = T_z^+ f'(x) + (I - T_z^+ f'(z)),$$

于是

$$\varphi'_z(z) = T_z^+ f'(z) + (I - T_z^+ f'(z)) = I.$$

因此

$$\dot{x}(0) \in N(f'(z)).$$

$\forall h \in N(f'(z))$, 令 $y(t) = th$, 则存在 $\varepsilon > 0, \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon), x(t) = \varphi_z^{-1}(y(t)) \in S$. 因为 $N(f'(z))$ 为 S 在 z 处的坐标空间，我们有

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (\varphi'_z\varphi_z^{-1}(y(t))^{-1}\dot{y}(t)\\ &= (\varphi'_z\varphi_z^{-1}(y(t)))^{-1}h,\end{aligned}$$

于是

$$\dot{x}(0) = (\varphi'_z(z))^{-1}h = h.$$

因此，由定义 2.5.5, 有

$$TS_x = N(f'(z)). \qquad \square$$

3. Banach 流形之间构造 Banach 子流形的广义原像定理

定义 2.5.10 设 M, N 为 C^k-Banach 流形 $(k \geqslant 1)$, $f: M \to N$ 为 C^1 映射. 点 $x_0 \in M$ 称为 f 的局部精细点，当且仅当 M 在 x_0 的允许坐标 (U, φ) 和 N 在 $y_0 = f(x_0)$ 的允许坐标 (V, ψ) 下， $x^0_\varphi = \varphi(x_0)$ 是 $\widetilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 的一个局部精细点，亦即存在 $\widetilde{f}'(x^0_\varphi)$ 的一个有界广义逆 T_0^+, 使

$$R(\widetilde{f}'(x_\varphi)) \cap N(T_0^+) = \{\theta\}$$

在坐标空间 X_φ 中点 x^0_φ 的附近点 x_φ 成立.

为了定义的合理性，我们必须说明上述定义不依赖允许坐标 (U,φ) 和 (V,ψ) 的选取.

在任意两对 M 在 x_0 和 N 在 $y_0 = f(x_0)$ 的允许坐标 (U,φ), (U_1,φ_1) 及 (V,ψ), (V_1,ψ_1) 下，我们有

$$\widetilde{f}_1(x_{\varphi_1}) = (\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1})(x_{\varphi_1}),$$

它映 $U_1(x^0_{\varphi_1}) = \varphi_1(U_1) \subset X_{\varphi_1}$ 到 Y_{φ_1}.

令 $U_{0,1} = \varphi(U \cap U_1)$ 和 $U_{1,0} = \varphi_1(U \cap U_1)$, 再令 $\Phi = \varphi_1 \circ \varphi^{-1} : U_{0,1} \subset X_\varphi \to X_{\varphi_1}$ 及 $\Psi = \psi_1 \circ \psi^{-1} : V_{0,1} \subset Y_\psi \to Y_{\psi_1}$, 其中 $V_{0,1} = \psi(V \cap V_1)$, 于是我们有

$$x_{\varphi_1} = \Phi(x_\varphi) \text{ 且 } y_{\psi_1} = \Psi(y_\psi).$$

显然，有

$$\Phi^{-1} = \varphi \circ \varphi_1^{-1} :\ U_{1,0} \subset X_{\varphi_1} \to X_\varphi$$

和

$$\Psi^{-1} = \psi \circ \psi_1^{-1} : V_{1,0} \subset Y_{\psi_1} \to Y_\psi,$$

其中 $V_{1,0} = \psi_1(V \cap V_1)$.

经直接计算

$$\widetilde{f}_1(x_{\varphi_1}) = (\Psi \circ \widetilde{f} \circ \Phi^{-1})(x_{\varphi_1}) \tag{2.5.2}$$

和

$$\widetilde{f}_1'(x_{\varphi_1}) = \Psi'(y_\psi)\widetilde{f}'(x_\varphi)(\Phi^{-1})'(x_{\varphi_1}). \tag{2.5.3}$$

假设 x^0_φ 是 $\widetilde{f}$ 的一个局部精细点. 则按定理 2.3.8, 存在 $\widetilde{f}'(x^0_\varphi)$ 的有界线性广义逆 T_0^+, 对 x^0_φ 附近的点 x_φ, 存在 $\widetilde{f}'(x_\varphi)$ 的有界线性广义逆，使

$$\lim_{x_\varphi \to x^0_\varphi} T^+_{x_\varphi} = T_0^+. \tag{2.5.4}$$

为证 $x^0_{\varphi_1}$ 也是 $\widetilde{f}_1$ 的一个局部精细点，令

$$g^+(x_{\varphi_1}) = \Phi'(x_{\varphi_1}) \circ T^+_{x_\varphi} \circ (\Psi^{-1})'(y_{\psi_1})$$

和

$$g_0^+ = g^+(x^0_{\varphi_1}) = \Phi'(x_{\varphi_1^0}) \circ T_0^+ \circ (\Psi^{-1})'(y^0_{\psi_1}),$$

其中 $y_\psi = (\psi \circ f)(x)$ 和 $y^0_\psi = (\psi \circ f)(x_0)$.

由 (2.5.4), 有

$$\lim_{x_{\varphi_1} \to x_{\varphi_1^0}} g^+(x_{\varphi_1}) = g_0^+, \tag{2.5.5}$$

且 $g^+(x_{\varphi_1})$ 在 $x^0_{\varphi_1}$ 的附近的每一点 x_{φ_1} 是 $\widetilde{f}_1'(x_{\varphi_1})$ 的有界线性广义逆. 事实上，经直接计算，有

$$g^+(x_{\varphi_1})\widetilde{f}_1'(x_{\varphi_1}) = \Phi'(x_{\varphi_1})T^+_{x_\varphi}\widetilde{f}'(x_\varphi)(\Phi^{-1})'(x_{\varphi_1}),$$

从而，有

$$\widetilde{f}_1'(x_{\varphi_1})g^+(x_{\varphi_1})\widetilde{f}_1'(x_{\varphi_1})$$

$$= \Psi'(y_\varphi)\widetilde{f}'(x_\varphi)T^+_{x_\varphi}\widetilde{f}'(x_\varphi)(\Phi^{-1})'(x_{\varphi_1})$$
$$= \widetilde{f}_1'(x_{\varphi_1})$$

和

$$g^+(x_{\varphi_1})\widetilde{f}_1'(x_{\varphi_1})g^+(x_{\varphi_1}) = g^+(x_{\varphi_1}),$$

即 $g^+(x_{\varphi_1})$ 在 $x^0_{\varphi_1}$ 的邻近点 x_{φ_1} 是 $\widetilde{f}_1'(x_{\varphi_1})$ 的广义逆.

由 (2.5.5), 再次应用定理 2.5.8 有

$$R(\widetilde{f}_1'(x_{\varphi_1})) \cap N(g_0^+) = \{\theta\}$$

对 $x^0_{\varphi_1}$ 的附近点 x_{φ_1} 成立，亦即 $x^0_{\varphi_1}$ 也是 $\widetilde{f}_1'$ 的局部精细点.

下面给出 $C^r(r \geqslant 1)$ Banach 流形之间 C^1 映射的广义正则值定义.

定义 2.5.11 $y \in N$ 被称为是 $C^r(r \geqslant 1)$Banach 流形 M 和 N 之间 C^1 映射 f 的一个广义正则值，当且仅当原像 $f^{-1}(y)$ 是空集或仅由 f 的精细点组成.

定理 2.5.2 设 f 是 $C^r(r \geqslant 1)$ Banach 流形 M 和 N 之间的 C^1 映射，则对 f 的广义正则值 y_0, 原像 $S = f^{-1}(y_0)$ 是 M 的一个 Banach 子流形，具有切空间 $TS_x = N(f'(x)), \forall x \in S$.

证明 在 $S = \varnothing$ 时，无须讨论. 现假设 $S \neq \varnothing$.

对任意 $x \in S$, 分别让 (U, φ) 是 M 在 x 的具有坐标空间 X_φ 的坐标，和 (V, ψ) 是 N 在 $y_0 = f(x)$ 的具有坐标空间 Y_ψ 的坐标. f 在上述坐标下，其表现 $\widetilde{f}$ 是

$$\widetilde{f}(h_\varphi) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(h_\varphi),$$

其中 $h_\varphi = \varphi(h)$, 所以对一切 $h \in U$, 有

$$f(h) = (\psi^{-1} \circ \widetilde{f} \circ \varphi)(h). \tag{2.5.6}$$

因为 $\widetilde{f} : \varphi(U) \subset X_\varphi \to Y_\psi$ 是 Banach 空间 X_φ 与 Y_ψ 之间的一个 C^1 映射.

由定理 2.4.2, 存在两个分别在 x_φ 和 y^0_ψ 的邻域 $U_1 \subset \varphi(U)$ 和 $V_1 \subset \psi(V)$, 以及在 U_1 上和 V_1 上的两个微分同胚 φ_1 和 ψ_1, 使得 $\varphi_1(x_\varphi) = \theta, \psi_1(y^0_\psi) = \theta$, 以及

$$\widetilde{f}(h_\varphi) = (\psi_1^{-1} \circ \widetilde{f}'(x_\varphi) \circ \varphi_1)(h_\varphi) \tag{2.5.7}$$

对每个 $h_\varphi \in U_1$ 成立，其中 $f(x) = y_0$.

这样，我们得到 $(\varphi^{-1}(U_1), \varphi_1 \circ \varphi)$ 为 $x \in \varphi^{-1}(U_1)$ 在 M 中的一个允许坐标.

由 (2.5.7),(2.5.6), 有

$$f(h) = (\psi^{-1} \circ \psi_1^{-1} \circ \widetilde{f}'(x_\varphi) \circ \varphi_1 \circ \varphi)(h)$$

对一切 $h \in \varphi^{-1}(U_1)$ 成立. 于是由 $\psi_1(y^0_\psi) = \theta$, 推出：对 $\forall h \in \varphi^{-1}(U_1) \cap S$, 都有

$$(\varphi_1 \circ \varphi)(h) \in N(\widetilde{f}'(x_\varphi)). \tag{2.5.8}$$

从而 $N(\widetilde{f}'(x_\varphi))$ 是此坐标的坐标空间. 显然 $N(\widetilde{f}'(x_\varphi))$ 是 X_φ 中的一个闭子空间, 因为 $\widetilde{f}'(x_\varphi)$ 具有一有界广义逆, $N(\widetilde{f}'(x_\varphi))$ 在 X_φ 中拓扑可补.

由定义 2.5.6, 为证 S 为 M 的一个 Banach 子流形, 只需证: $(\varphi_1\circ\varphi)(\varphi^{-1}(U_1)\cap S)$ 是 $N(\widetilde{f}'(x_\varphi))$ 中的一个开集. 为此, 只需证明

$$\varphi_1(U_1\cap\varphi(S\cap U))=N(\widetilde{f}'(x_\varphi))\cap\varphi_1(U_1), \tag{2.5.9}$$

这是因为

$$(\varphi_1\circ\varphi)(\varphi^{-1}(U_1)\cap S)=\varphi_1(U_1\cap\varphi(S\cap U)).$$

对任一 $h\in\varphi^{-1}(U_1)\cap S$, 按 (2.5.6), 有

$$y_0=(\psi^{-1}\circ\widetilde{f})(h_\varphi),$$

结果 $\psi(y_0)=\widetilde{f}(h_\varphi)$. 按 (2.5.7), 有

$$\begin{aligned}\theta=\psi_1(y_\psi^0)&=(\psi_1\circ\widetilde{f})(h_\varphi)\\&=\widetilde{f}'(x_\varphi)\circ(\varphi_1\circ\varphi)(h),\end{aligned}$$

所以

$$(\varphi_1\circ\varphi)(h)\in N(\widetilde{f}'(x_\varphi)).$$

反之, 对任一 $w\in N(\widetilde{f}'(x_\varphi))\cap\varphi_1(U_1)$, 存在 $h_\varphi\in U_1$ 使得

$$w=\varphi_1(h_\varphi)=(\varphi_1\circ\varphi)(h)$$

和

$$\theta=\widetilde{f}'(x_\varphi)w=\widetilde{f}'(x_\varphi)(\varphi_1\circ\varphi)(h).$$

从 $\psi_1(y_\psi^0)=\theta$ 推出

$$(\psi^{-1}\circ\widetilde{f}'(x_\varphi)\circ\varphi_1\circ\varphi)(h)=y_\psi^0,$$

按 (2.5.7), 有 $\widetilde{f}(h_\varphi)=y_\psi^0$, 结果 $f(h)=y_0$, 亦即 $h\in S$.

联合上面两个结果, (2.5.9) 为真, 故 S 是 M 的一个 C^1-Banach 子流形.

下面计算 TS_x.

设 $x(t)\in\varphi^{-1}(U_1)\cap S$ 是一个 C^1 曲线, 具有 $x(0)=x$. 从 $f(x(t))=y_0$ 和 $\psi_1(y_\psi^0)=\theta$, 由 (2.5.8), 推出

$$\theta=(\widetilde{f}'(x_\varphi)\circ\varphi_1\circ\varphi)(x(t)).$$

因此, 两边对 t 求导, 得

$$\theta=\widetilde{f}'(x_\varphi)\varphi_1'(x_\varphi(t))\dot{x}_\varphi(t),$$

从而给出

$$\varphi_1'(x_\varphi)\dot{x}_\varphi(0)\in N(\widetilde{f}'(x_\varphi)).$$

在 x_{φ_1} 的邻近，取

$$\varphi_1(z_\varphi) = T^+_{x_\varphi}(\widetilde{f}(z_\varphi) - \widetilde{f}(x_\varphi)) + (I - T^+_{x_\varphi}\widetilde{f}'(x_\varphi))(z_\varphi - x_\varphi),$$

求微分得

$$\varphi_1'(z_\varphi) = T^+_{x_\varphi}\widetilde{f}'(z_\varphi) + (I - T^+_{x_\varphi}\widetilde{f}'(x_\varphi)).$$

于是 $\varphi_1'(x_\varphi) = I$, 所以

$$\dot{x}_\varphi(0) \in N(\widetilde{f}'(x_\varphi)).$$

由定义 2.5.5, 有

$$TS_x \subset N(\widetilde{f}'(x_\varphi)).$$

反之，让 $y(t) = x_\varphi + th_\varphi, \forall h_\varphi \in N(\widetilde{f}'(x_\varphi))$, 则存在充分小的 $\varepsilon > 0$, 使 $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, 有

$$x(t) = \varphi^{-1}(x_\varphi + th_\varphi) \in S.$$

这样，有

$$x_\varphi(t) = y(t).$$

求微分，得

$$\dot{x}_\varphi(0) = h_\varphi \in TS_x,$$

从而

$$N(\widetilde{f}'(x_\varphi)) \subset TS_x.$$

综合上述两个结果，有

$$TS_x = N(\widetilde{f}'(x_\varphi)). \qquad \square$$

【注　释】

§2.1　线性算子的内逆与外逆的定义与性质，取自 [NV]. 有关外逆的稳定性的定理 2.1.12 及外逆的稳定性应用于拟牛顿迭代法，见 [NC].

§2.2　线性算子的线性斜投影广义逆的定义及性质的讨论，取自 [NV]. Banach 空间中线性斜投影广义逆存在条件的主要定理 2.2.3 及其证明，在收入本书时，做了改进. 在 Hilbert 空间中，重点讨论了无界闭线性算子的 Moore-Penrose 广义逆，以便应用于不适定 (偏) 微分方程的研究中. 这与文献 [Gr, Wag2, WWQ] 不同，这些文献中，讨论 Hilbert 空间中有界线性算子的 Moore-Penrose 广义逆.

§2.3　Banach 空间中线性算子的线性斜投影广义逆已不具备外逆的稳定性 (因为内逆是不稳定的), 因而讨论其扰动稳定性条件及连续性条件就显得非常重要. 定理 2.3.1 属于 [Na5]. 陈国良与薛以锋 [CX] 引入稳定性扰动的概念，证得一系列稳定扰动的等价条件. 马吉溥，曹伟平，宋国柱 [Ma1,MCS,Ma3] 引入 Banach 空间中有界线性算子族的精细点概念，并以此给出线性斜投影广义逆连续性的充要条件. 稳定扰动与精细点虽然是各自独立引进的概念，但它们之间有着必然的联系. 在本节

中，我们首先引进“稳定扰动”的定义，再以此定义算子族的局部“精细点”，并给出连续性的刻画. 本节内容取自 [Na5, CX, MCS, Ma3].

§2.4 及 §2.5　马吉溥教授引进的算子族的局部精细点的定义，其重要性不仅在于对算子族线性斜投影广义逆连续性的刻画. 而且在于以此为工具利用广义逆刻画了非线性算子的局部线性化问题， Banach 流形的构造性问题. §2.4 中非线性算子的局部线性化定理 2.4.2 取自马吉溥的论文 [Ma2] 与 [Ma4], 而关于 Banach 流形的构造的定理 2.5.1 及定理 2.5.2 取自马吉溥的 [Ma4] 与 [Ma5]. 利用线性斜投影广义逆研究局部分歧性的定理 2.4.3 与定理 2.4.4 为王玉文、刘萍、殷洪才、孙秀梅等人尚未发表的结果.

第三章　线性算子的 Drazin 广义逆

1958 年， M. P. Drazin[Dr] 在半群和结合环上定义了 Drazin 逆，以后又对方阵的 Drazin 逆作了深入研究． Drazin 逆在奇异微分和差分方程、 Markov 链、迭代方法和多体动力学等方面有重要的应用 (见 [CM1, NZ, SFR]).

Banach 空间中线性算子的 Drazin 广义逆有许多学者研究 (见 [Ca, TL, Qi, Ra, KR, KT, We, Cai, CK]). 本章主要介绍这方面近 20 年的成果.

§3.1　Drazin 广义逆的定义与性质

1. 算子的指标

记 X 为 (复)Banach 空间. $L(X)$ 和 $\mathscr{L}(X)$ 分别表示 X 上的线性算子和有界线性算子全体. $\operatorname{Ind}(T)$ 表示线性算子 T 的指标.

设 $T \in L(X)$, 显然有

$$\{\theta\} \subset N(T) \subset N(T^2) \subset \cdots \subset N(T^k) \cdots , \tag{3.1.1}$$

$$X \supset R(T) \supset R(T^2) \supset \cdots \supset R(T^k) \supset \cdots , \tag{3.1.2}$$

其中 $k = 0, 1, 2, \cdots$.

显然

$$N(T^{n+1}) = \{x \in D(T):\ Tx \in N(T^n)\}.$$

由此推出：如果 $N(T^n) = N(T^{n+1})$, 则对一切 $k > n, N(T^n) = N(T^k)$. 如果存在一个非负整数 n, 满足 $N(T^n) = N(T^{n+1})$, 则称 T 有有限升指标. 若 T 有有限升指标，则满足 $N(T^\alpha) = N(T^{\alpha+1})$ 的最小正数 α 称为 T 的升指标，记为 $\alpha = \alpha(T)$. 如果没有这样的整数存在，记 $\alpha(T) = \infty$. $\alpha(T) = 0$ 当且仅当 T 为一对一算子.

又显然有

$$R(T^{n+1}) = T(R(T^n)) \cap D(T).$$

于是，如果 $R(T^n) = R(T^{n+1})$, 则 $R(T^n) = R(T^k)$ 对一切 $k > n$ 成立. 如果存在非负整数 n, 使 $R(T^n) = R(T^{n+1})$, 则称 T 有有限降指标. 若 T 有有限降指标，则满足 $R(T^\delta) = R(T^{\delta+1})$ 的最小正数 δ 称为 T 的降指标，记为 $\delta = \delta(T)$. 如果对每个 n, $R(T^{n+1})$ 为 $R(T^n)$ 的真子空间，记 $\delta(T) = \infty$. $\delta(T) = 0$ 当且仅当 T 为满射.

下面证明一个技术性很强的引理.

引理 3.1.1　设存在数 λ, 满足 $R(\lambda I - T) = X$, 则对给出的 $i, j = 0, 1, 2, \cdots$, 每个 $x \in X$ 可表示为 $x = u + v$, 这里 $u \in D(T^i)$ 与 $v \in R(T^j)$, 即

$$X = D(T^i) + R(T^j). \tag{3.1.3}$$

证明　由于 $R((\lambda I-T)^1)=R((\lambda I-T)^0)=X$, 从而对 $n\geqslant 0$, 有 $R((\lambda I-T)^n)=X$. 如果 $\lambda=0$, 则 (3.1.3) 为真. 设 $n=i+j$. 给定 $y\in X=R((\lambda I-T)^n)$, 有 $x\in D((\lambda I-T)^n)=D(T^n)$ 使得

$$y=(\lambda I-T)^n x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\begin{pmatrix} n\\ k\end{pmatrix}\lambda^k T^{n-k}x.$$

对 $0\leqslant k\leqslant i, T^{n-k}x\in R(T^{n-k})\subset R(T^{n-i})=R(T^j)$, 且对 $i\leqslant k\leqslant n, T^{n-k}x\in D(T^k)\subset D(T^i)$, 于是 $y\in R(T^j)+D(T^i)$. □

定理 3.1.1　设 $T\in L(X)$. 如果 $\alpha(T)=k<\infty$ 且 $\delta(T)=h<\infty$, 则 $\alpha(T)\leqslant\delta(T)$. 如果进而 $D(T)=X$ 或存在数 λ, 使 $R(\lambda I-T)=T$, 则 $\alpha(T)=\delta(T)=k$ 且

$$X=R(T^k)\dot{+}N(T^k). \tag{3.1.4}$$

证明　(i) 任意固定 $j\geqslant 1$. 如果 $x\in R(T^k)\cap N(T^j)$, 则存在 $v\in D(T^k)$, 使 $x=T^kv$, 且 $\theta=T^jx=T^{k+j}v$, 从而因 $\alpha(T)=k$, 有 $v\in N(T^{k+j})=N(T^k)$. 这表明 $x=T^kv=\theta$, 故

$$R(T^k)\cap N(T^j)=\{\theta\},\ j=1,2,\cdots. \tag{3.1.5}$$

现在, 对任意 $x\in D(T^h)$, 因 $\delta(T)=h$, 有 $T^hx\in R(T^h)=R(T^{h+j})$, 从而存在 $v\in D(T^{h+j})$, $T^hx=T^{h+j}v$. 故

$$T^h(x-T^jv)=\theta.$$

因此 $x=T^jv+(x-T^jv)\in R(T^j)+N(T^h)$. 于是

$$D(T^h)\subset R(T^j)+N(T^h), j=1,2,\cdots. \tag{3.1.6}$$

如果 $x\in N(T^{h+1})\subset D(T^h)$, 则由 (3.1.6), 取 $j=k$, $x=x_1+x_2$, $x_1\in R(T^k)$, $x_2\in N(T^h)$. 于是 $x_1=x-x_2\in N(T^{h+1})+N(T^h)=N(T^{h+1})$. 由 (3.1.5), $x_1=\theta$, 于是 $x=x_2\in N(T^h)$. 因此 $N(T^{h+1})\subset N(T^h)$. 故 $N(T^{h+1})=N(T^h)$. 这表明 $k=\alpha(T)\leqslant h$.

(ii) 若 $D(T)=X$ 或 $R(\lambda I-T)=X$, 则由 (3.1.6) 与引理 3.1.1, 有

$$X=R(T^j)+N(T^h),\ j=1,2,\cdots. \tag{3.1.7}$$

在 (3.1.5) 中取 $j=h$, 在 (3.1.7) 中取 $j=k$, 得

$$X=R(T^k)\dot{+}N(T^h). \tag{3.1.8}$$

由此及 (3.1.7), 显然, 对 $j\geqslant 1, R(T^j)$ 不能是 $R(T^k)$ 的真子空间. 于是 $h=\delta(T)\leqslant k$. 因此 $k=h$, 即 $\alpha(T)=\delta(T)$. □

注记　当 X 为有限维时, $\alpha(T)$ 与 $\delta(T)$ 必定有限. 只需 T 定义在全空间上, 有 $\alpha(T)=\delta(T)=k$ 且 $X=R(T^k)\dot{+}N(T^k)$.

定义 3.1.1　设 $T\in L(X), D(T)=X$ 或 $R(\lambda I-T)=X$ 且 $\alpha(T)<\infty, \delta(T)<\infty$. 则整数 $k=\alpha(T)=\delta(T)$ 称作算子 T 指标, 记作 $\mathrm{Ind}(T)=k$. 规定 $\mathrm{Ind}(\theta)=1$.

2. 线性变换的 Drazin 广义逆的定义与存在性

定义 3.1.2 设 X 为线性空间. 设 $T \in L(X)$ 且 $X = D(T)$, 若对某些非负整数 k, 存在线性算子 $S \in L(X)$, 满足下列等式:

(1^k) $TST^k = T^k$,

(2) $STS = S$,

(3) $TS = ST$,

则称 S 为 T 的 Drazin 广义逆，记为 T^D.

以下约定 $T \in L(X)$ 蕴涵 $D(T) = X$.

特别地，当 $k = 1$ 时，称 T^D 为 T 的群逆，并记为 T^g.

下面证 T^D 的唯一性.

定理 3.1.2 若 $T \in L(X)$, 且存在 T 的 Drazin 广义逆 T^D, T_1^D, 分别满足 (1^k), (2), (5) 和 (1^{k_1}), (2), (5), 则

$$T^D = T_1^D. \tag{3.1.9}$$

证明 不妨设 $k_1 \geqslant k$, 有

$$T^D = T^D T T^D = T(T^D)^2.$$

由于 $T^2(T^D)^2 = TT^DTT^D = TT^D$, 且

$$\begin{aligned} T^{h+1}(T^D)^{h+1} &= T^{h-1}(T^D)^{h-1}TT^DTT^D \\ &= T^{h-1}(T^D)^{h-1}TT^D \\ &= T^h(T^D)^h, \quad h \geqslant 1, \end{aligned}$$

从而 $TT^D = T^{k_1}(T^D)^{k_1}$, 于是

$$\begin{aligned} T^D &= TT^DT^D = T^{k_1}(T^D)^{k_1+1} \\ &= TT_1^DT^{k_1}(T^D)^{k_1+1} \\ &= T_1^DT^{k_1+1}(T^D)^{k_1+1} = (T_1^D)^{k_1+1}T^{2k_1+1}(T^D)^{k_1+1} \\ &= (T_1^D)^{k_1+1}T^{k_1+1}T^D = (T_1^D)^{k_1+1}T^{k_1-k}T^{k+1}T^D \\ &= (T_1^D)^{k_1+1}T^{k_1-k}T^k = (T_1^D)^{k_1+1}T^{k_1} \\ &= T_1^D(T_1^D)^{k_1}T^{k_1} = T_1^DT_1^DT = T_1^D. \end{aligned}$$

□

由此定理，对一个算子 $T \in L(X)$, 如果 T 的 Drazin 逆存在，则必唯一，且存在满足 (1^k), (2), (5) 的最小正整数 k.

引理 3.1.2 设 $T \in L(X)$, $\text{Ind}(T) = k$, 则存在线性算子 $T^{k+} \in L(X)$ 使得 $D(T^{k+}) = X$ 满足

$$\begin{cases} T^kT^{k+}T^k = T^k, & (3.1.10) \\ T^{k+}T^kT^{k+} = T^{k+}, & (3.1.11) \\ T^{k+}T^k = T^kT^{k+} = Q, & (3.1.12) \end{cases}$$

且

$$R(T^{k+}) = R(T^k), N(T^{k+}) = N(T^k), \tag{3.1.13}$$

其中 Q 为 X 中沿 $N(T^k)$ 到 $R(T^k)$ 上的线性投影算子，换言之， $T^{k+} = T^{kg}$.

证明　由定理 3.1.1, 有 $X = R(T^k)\dot{+}N(T^k)$, 而 $T^k \in L(X)$. 由 §2.1, 存在 T^k 的代数广义逆，记为 T^{k+}, 满足

$$\begin{aligned} T^kT^{k+}T^k &= T^k, \\ T^{k+}T^kT^{k+} &= T^{k+}, \\ T^{k+}T^k &= I - P, \\ T^kT^{k+} &= Q, \end{aligned}$$

其中 P 为沿 $R(T^k)$ 到 $N(T^k)$ 的线性投影算子， Q 为沿 $N(T^k)$ 到 $R(T^k)$ 上的线性投影算子，因此， $Q = I - P$, 从而 (3.1.10)~(3.1.12) 为真.

由 (3.1.10),(3.1.11) 两式得

$$\begin{aligned} R(T^k) &= R(T^kT^{k+}T^k) \subset R(T^kT^{k+}) \subset R(T^k), \\ R(T^{k+}) &= R(T^{k+}T^kT^{k+}) \subset R(T^{k+}T^k) \subset R(T^{k+}), \\ N(T^k) &= N(T^kT^{k+}T^k) \supset N(T^{k+}T^k) \supset N(T^k), \\ N(T^{k+}) &= N(T^{k+}T^kT^{k+}) \supset N(T^kT^{k+}) \supset N(T^{k+}). \end{aligned}$$

再由 (3.1.15), 有

$$\begin{aligned} R(T^k) &= R(T^kT^{k+}) = R(T^{k+}T^k) = R(T^{k+}), \\ N(T^k) &= N(T^{k+}T^k) = N(T^kT^{k+}) = N(T^{k+}). \end{aligned}$$

□

定理 3.1.3　设 $T \in L(X)$ 且 $\mathrm{Ind}(T) = k$, 则 T 的 Drazin 广义逆 T^D 存在，且

$$T^D = T^{k+}T^{k-1}. \tag{3.1.14}$$

证明　由引理 3.1.2,T^k 的代数广义逆 T^{k+} 存在，故由 (3.1.14) 所定义的 T^D 有意义. 下面验论 T^D 满足定义 3.1.2 中 $(1^k),(2),(5)$.

因为 $\mathrm{Ind}(T) = k$ 且 $D(T) = X$, 由定理 3.1.1,$X = R(T^k)\dot{+}N(T^k)$. 任给 $x \in X = R(T^k)\dot{+}N(T^k)$, 有唯一的分解 $x = x_0 + x_1$, $x_0 \in N(T^k), x_1 \in R(T^k) = R(T^{k+1})$, 于是存在 z 使 $x_1 = T^{k+1}z$.

(i) 由 (3.1.10) 及 (3.1.12), 有

$$\begin{aligned} TT^DT^kx &= TT^DT^kx_0 + TT^DT^kx_1 \\ &= TT^DT^k(T^{k+1}z) \\ &= TT^{k+}T^{k-1}T^kT^{k+1}z \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= TQT^k(T^k z) \\
&= T^k(T^{k+1}z) = T^k x,
\end{aligned}
$$

因此

$$T^D T T^k = T^k.$$

(ii) 由 (3.1.11), 有

$$
\begin{aligned}
T^D T T^D &= T^{k+} T^k T^{k+} T^{k-1} \\
&= T^{k+} T^{k-1} = T^D,
\end{aligned}
$$

故

$$T^D T T^D = T^D.$$

(iii) 由引理 3.1.2, 有 $N(T) \subset N(T^k) = N(T^{k+})$, 注意到 $T^{k-1}x_0 \in N(T)$, 我们有

$$
\begin{aligned}
T^D T x &= T^{k+} T^k x_0 + T^{k+} T^k x_1 \\
&= Q x_1 = x_1, \qquad (3.1.15) \\
T T^D x &= T T^{k+} T^{k-1} x_0 + T T^{k+} T^{k-1} x_1 \\
&= T T^{k+} T^{k-1} T^{k+1} z \\
&= TQT^k z \\
&= TT^k z = x_1, \qquad (3.1.16)
\end{aligned}
$$

从而由 (3.1.14) 与 (3.1.15), 有

$$T^D T = T^D T.$$

由定义 3.1.2, T^D 为 T 的 Drazin 广义逆. □

定理 3.1.4 设 $T \in L(X)$, 则 T 存在 Drazin 广义逆 T^D 的充分必要条件是 $\alpha(T), \delta(T)$ 均有限, 此时 $k = \alpha(T) = \delta(T)$ 为 T 的 Drazin 广义逆 T^D 满足定义 3.1.2 中 (1^k),(2),(5) 的最小指标.

证明 必要性. 设 T 有 Drazin 广义逆 T^D 存在. 由定理 3.1.2, 有最小正整数 $k_0 \geqslant 1$, 使 T^D 满足 (1^{k_0}),(2),(5).

下面证 $k_0 = \alpha(T) = \delta(T)$, 即 $k_0 = \mathrm{Ind}(T)$.

事实上, 任给 $x \in R(T^{k_0})$, 有 $y \in X$, 使

$$x = T^{k_0} y = T^{k_0+1} T^D y \in R(T^{k_0+1}),$$

即 $R(T^{k_0}) = R(T^{k_0+1})$.

又任取 $x \in N(T^{k_0+1})$, 则

$$T^{k_0} x = T^D T^{k_0+1} x = \theta,$$

即 $x \in N(T^{k_0})$, 故 $N(T^{k_0}) = N(T^{k_0+1})$. 于是 $\delta(T) < \infty, \alpha(T) < \infty$, 注意 $D(T) = X$, 由定理 3.1.1, $\mathrm{Ind}(T) = l = \delta(T) = \alpha(T) < \infty$.

如果 $\mathrm{Ind}(T) = l < k_0$, 则由定理 3.1.3 及定理 3.1.2, T^D 满足 $(1^l),(2),(5)$, 这与 k_0 的最小性矛盾. 因此

$$\mathrm{Ind}(T) = k_0.$$

充分性. 由定理 3.1.3 立得. □

3. 有界线性算子的 Drazin 广义逆

设 X 为 Banach 空间, 约定 $T \in L(X)$ 或 $T \in \mathscr{L}(X)$ 蕴涵 $D(T) = X$.

定理 3.1.5 设 X 为 Banach 空间, $T \in \mathscr{L}(X), \mathrm{Ind}(T) = k$, $R(T^k)$ 为 X 中闭子空间, 则 T 的 Drazin 广义逆 T^D 存在, 且

$$T^D = T^{k+}T^{k-1} \tag{3.1.17}$$

为连续的, 这里 T^{k+} 为 T^k 的线性斜投影广义逆.

反之, 如果 $T \in \mathscr{L}(X)$ 具有连续的 Drazin 逆 T^D, 且 k_0 为 T^D 满足 $(1^k),(2),(5)$ 的最小正整数, 则 T 的指标为 k_0, 且 $R(T^{k_0})$ 为 X 中的闭线性空间.

证明 设 $T \in \mathscr{L}(T), \mathrm{Ind}(T) = k, X = D(T)$, 由定理 3.1.1,

$$X = R(T^k)\dot{+}N(T^k). \tag{3.1.18}$$

因为 $T^k \in \mathscr{L}(X)$, 故 $N(T^k)$ 为 X 的闭子空间, 再由条件: $R(T^k)$ 为闭子空间, 故 (3.1.18) 为拓扑直和, 即

$$X = R(T^k) \oplus N(T^k). \tag{3.1.19}$$

由定理 3.1.3, 由 (3.1.17) 定义的 T^D 为 T 的 Drazin 逆. 为证 T^D 的连续性, 只需证 T^{k+} 为连续的.

由 (3.1.19), $T^k \in \mathscr{L}(X)$, 知 $T^k|_{R(T^k)}$ 为从 $R(T^k)$ 到 $R(T^k)$ 上的一一连续映射, 再由 (3.1.12) 及 (3.1.13) 可知 $T^{k+}|_{R(T^k)}$ 为 $T^k|_{R(T^k)}$ 在 Banach 空间 $R(T^k)$ 上的逆算子, 从而由 Banach 逆算子定理, $T^{k+}|_{R(T^k)}$ 在 $R(T^k)$ 上连续. 于是 $Q = T^{k+}T^k$ 在 X 上连续. 下证 T^{k+} 在 X 上连续.

因 T^{k+} 为线性的, 只需证 T^{k+} 在 θ 处连续. 设 $\{x^n\} \subset X, x^n \to \theta(n \to \infty)$. 由 (3.1.19), $x^n = x_0^n + x_1^n, x_0^n \in N(T^k), x_1^n \in R(T^k)$. 由 Q 的连续性推出, $x_1^n = Qx_1^n = Qx^n \to \theta(n \to \infty)$ 而 $T^{k+}|_{R(T^k)}$ 在 $R(T^k)$ 上连续, 注意 $N(T^k) = N(T^{k+})$, 故有

$$\begin{aligned} T^{k+}x^n &= T^{k+}x_0^n + T^{k+}x_1^n = T^{k+}x_1^n \\ &= T^{k+}|_{R(T^k)}x_1^n \to \theta \ (n \to \infty). \end{aligned}$$

因此 T^{k+} 在 θ 处连续, 从而 T^{k+} 在 X 上处处连续, 因此 T^D 连续.

反之，如果 T^D 连续， k_0 为 T^D 满足 $(1^k),(2),(5)$ 的最小正整数，由定理 3.1.4, $\mathrm{Ind}(T)=k$, 下证 $R(T^{k_0})$ 为闭子空间.

由 $T^D=T^DTT^D$, 有 $TT^D=(TT^D)^2=\cdots=(TT^D)^{k_0}$, 从而 $R(T^{k_0})=R((TT^D)T^{k_0})\subset R(TT^D)$, 且 $R(TT^D)=R((TT^D)^{k_0})\subset R(T^{k_0})$, 故 $R(T^{k_0})=R(TT^D)$; 又由 $N(T^{k_0})=N(T^{k_0}(TT^D))\supset N(TT^D)$, 且 $N(TT^D)=N((TT^D)^{k_0})=N((T^D)^{k_0}T^{k_0})\supset N(T^{k_0})$, 可知 $N(T^{k_0})=N(TT^D)$. 因此，由 T 及 T^D 的连续性，幂等算子 $TT^D=(TT^D)^2$ 为 X 中沿 $N(T^{k_0})$ 到 $R(T^{k_0})$ 上的连续性投影算子，因此 $R(T^{k_0})$ 为闭子空间. □

定理 3.1.6 设 X 为 Banach 空间， $T\in\mathscr{L}(X)$, $\mathrm{Ind}(T)=k$. T^D 为 T 的连续 Drazin 广义逆，当且仅当 $R(T^k)$ 闭，且 T^D 为 $(T|_{R(T^k)})^{-1}$ 从 $R(T^k)$ 到 X 上的唯一的且满足 $N(T^D)=N(T^k)$ 与

$$T^D=(T|_{R(T^k)})^{-1}Q$$

的线性延拓，其中 $Q=Q_{R(T^k),N(T^k)}$ 为 X 中沿 $N(T^k)$ 到 $R(T^k)$ 上的有界线性投影算子.

证明 充分性. 因为 $\mathrm{Ind}(T)=k$, 由定理 3.1.1, X 有直和分解

$$X=R(T^k)\dot{+}N(T^k),$$

由 $R(T^k)$ 的闭性及 T^k 的连续性，知

$$X=R(T^k)\oplus N(T^k). \tag{3.1.20}$$

取 $\widetilde{T}:=T|_{R(T^k)}$, 则 $\widetilde{T}$ 是 $R(T^k)$ 到 $R(T^k)$ 上的一一映射. 事实上，若 $\widetilde{T}x=\theta$, 其中 $x\in R(T^k)$, 则 $x=T^ky, y\in N(T^{k+1})$. 而 $N(T^{k+1})=N(T^k)$, 所以 $x=\theta$. 另一方面，对任意 $y\in R(T^k)$, 由于 $R(T^k)=R(T^{k+1})$, 因此，存在某个 $x\in X$, 使得 $y=T\cdot T^kx=\widetilde{T}(T^kx)\in\widetilde{T}R(T^k)$. 因此， $\widetilde{T}$ 为一一到上的映射，由于 $R(T^k)$ 为 Banach 空间，由 Banach 逆算子定理， $\widetilde{T}^{-1}\in\mathscr{L}(R(T^k))$.

由 (3.1.20) 式易得，沿 $N(T^k)$ 到 $R(T^k)$ 上的线性投影算子 $Q=Q_{R(T^k),N(T^k)}$ 为连续的.

令

$$T^D=\widetilde{T}^{-1}Q, \tag{3.1.21}$$

则 T^D 为 X 中连续算子.

下面证 T^D 满足定义 3.1.2 中 $(1^k),(2),(5)$.

$\forall x\in X, x=x_0+x_1, x_0\in N(T^k), x_1\in R(T^k)$, 由 T^D 的定义，有

$$T^Dx=\widetilde{T}^{-1}x_1,\ Tx_0\in N(T^{k-1})\subset N(T^k),$$

从而，有 $Q(Tx_0)=\theta$, 于是

$$\begin{aligned}TT^DT^kx &= TT^DT^kx_1 = T\widetilde{T}^{-1}T^kx_1\\&= T^kx_1 = T^kx,\\T^DTT^Dx &= T^DT\widetilde{T}^{-1}x_1 = T^Dx_1 = T^Dx,\\TT^Dx &= T\widetilde{T}^{-1}x_1 = x_1 = T^DTx_1\\&= T^D(Tx_0) + T^D(Tx_1)\\&= T^DTx.\end{aligned}$$

因此，T^D 为 T 的连续 Drazin 广义逆.

必要性. 设 T^D 为 T 的连续 Drazin 广义逆. 由定理 3.1.5, $R(T^k)$ 为 X 中闭子空间且 T^D 满足定义 3.1.2 中 $(1^k),(2),(5)$ 的最小正整数为 k. 由 T^D 的唯一性，得

$$T^D = \widetilde{T}^{-1}Q,$$

即

$$T^D = (T|_{R(T^k)})^{-1}Q.$$

显然，$N(T^D) = N(Q) = N(T^k)$. □

定义 3.1.3 设 $T \in \mathscr{L}(X), \mathrm{Ind}(T) = k, R(T^k)$ 为闭子空间，T^D 为 T 的 Drazin 广义逆. 将 TT^DT 称为 T 的核心，记作 C_T. 令 $N_T = T - C_T$, 则

$$T = C_T + N_T \tag{3.1.22}$$

称为 T 的核心幂零分解.

注记 N_T 为指标为 k 的幂零算子. 事实上,

$$\begin{aligned}(N_T)^k &= (T - TT^DT)^k = T^k(I - T^DT)^k\\&= T^k(I - T^DT) = \theta,\end{aligned}$$

而对 $l < k, (N_T)^l = T^l(I - T^DT) \neq \theta$.

定理 3.1.7 设 $T \in \mathscr{L}(X), \mathrm{Ind}(T) = k, R(T^k)$ 闭，T^D 为 T 的 Drazin 广义逆. 则下述结论成立:

(i) $\mathrm{Ind}(T^D) = \mathrm{Ind}(C_T) = \begin{cases} 1, \text{当 } \mathrm{Ind}(T) \geqslant 1, \\ 0, \text{当 } \mathrm{Ind}(T) = 0; \end{cases}$

(ii) $N_TC_T = C_TN_T = \theta$;

(iii) $N_TT^D = T^DN_T = \theta$;

(iv) $C_TTT^D = TT^DC_T = C_T$;

(v) $(T^D)^D = C_T$;

(vi) $T = C_T \Leftrightarrow \mathrm{Ind}(T) \leqslant 1$;

(vii) $T^D = C_T^D$.

证明 (i) 若 $\operatorname{Ind}(T)=0$, 则 T^{-1} 存在, 且 $T^D=T^{-1}, C_T=TT^DT=T$. 这时 $\operatorname{Ind}(T^D)=\operatorname{Ind}(C_T)=0$.

若 $k=\operatorname{Ind}(T)\geqslant 1$, 则 $R(T^k)=R(T^D)\neq X$ 而 $R(T^D)=R(T^k)=T^DR(T^k)=R((T^D)^2)$, 且

$$\begin{aligned}R(C_T)&=R(TT^DT)=R(T^DT^2)\subset R(T^D)\\&=R(T^k)=R(TT^DT^k)\subset R(TT^DT)=R(C_T).\end{aligned}$$

于是, 有

$$R(C_T)=R(T^k)=C_TR(T^k)=R(C_T^2).$$

因此 $\operatorname{Ind}(T^D)=\operatorname{Ind}(C_T)=1$.

(ii)
$$\begin{aligned}N_TC_T&=(T-C_T)C_T=(T-TT^DT)TT^DT\\&=T^2T^DT-TT^DTTT^DT\\&=T^2T^DT-T^2T^DTT^DT=\theta.\end{aligned}$$

同理

$$C_TN_T=\theta.$$

(iii)
$$\begin{aligned}N_TT^D&=(T-T^DT)T^D\\&=TT^D-TT^DTT^D=\theta.\end{aligned}$$

同理

$$T^DN_T=\theta.$$

(iv)
$$\begin{aligned}C_TTT^D&=TT^DTTT^D=TT^DTT^DT\\&=TT^DT=C_T.\end{aligned}$$

同理

$$TT^DC_T=C_T.$$

(v) 若 $\operatorname{Ind}(T)=0$, 则 $T^D=T^{-1}$, 于是

$$(T^D)^D=T=C_T.$$

若 $\operatorname{Ind}(T)\geqslant 1$, 由 (i), $\operatorname{Ind}(T^D)=1$. 于是

$$\begin{aligned}T^DC_TT^D&=T^DTT^DTT^D=T^DTT^D=T^D,\\C_TT^DC_T&=TT^DTT^DTT^DT=TT^DTT^DT\\&=TT^DT=C_T,\\C_TT^D&=TT^DTT^D=T^DTT^DT=T^DC_T.\end{aligned}$$

因此 $(T^D)^D=C_T$.

(vi) 若 $\operatorname{Ind}(T) \leqslant 1$, 则 $C_T = TT^DT = T$. 反之, 若 $C_T = T$, 即 $TT^DT = T, PT = T$, 这里 $P = TT^D$, 则

$$R(T) \subset R(P) = R(T^k).$$

由于 $R(T) \supset R(T^2) \supset \cdots \supset R(T^k)$, 所以

$$R(T) = R(T^2) = \cdots = R(T^k),$$

即 $\operatorname{Ind}(T) \leqslant 1$.

(vii) $C_T^D = (T^D)^2(T^D)^D = (T^D)^2 C_T = T^D$. □

§3.2 Drazin 广义逆的表示

引理 3.2.1 设 $T \in \mathscr{L}(X)$ 且 $\operatorname{Ind}(T) = k$. 则 T 的 Drazin 广义逆 T^D 存在且

$$T^D = \widehat{T}^{-1}T^k.$$

如果 $R(T^k)$ 是闭的, 则 $T^D \in \mathscr{L}(X)$, 其中 $\widehat{T} = T^{k+1}|_{R(T^k)}$ 是 T^{k+1} 在 $R(T^k)$ 上的限制.

证明 首先证 $\widehat{T} = T^{k+1}|_{R(T^k)} : R(T^k) \to R(T^k)$ 为一一到上的映射. 假设 $\widehat{T}x = \theta$, 其中 $x \in R(T^k)$, 则存在一个 $y \in X$ 使 $x = T^k y$. 然而 $T^{2k+1}y = \widehat{T}x = \theta$, 即 $y \in N(T^{2k+1}) = N(T^k)$, 因此 $x = T^k y = \theta$, $\widehat{T}$ 为单射. 另一方面, 对任意 $y \in R(T^k)$, 由 $R(T^k) = R(T^{2k+1})$, 存在一个 $x \in X$ 满足 $y = T^{k+1}(T^k x) \in \widehat{T}R(T^k)$, 从而 $\widehat{T}$ 为满射. 令

$$S = \widehat{T}^{-1}T^k.$$

下面验证 S 满足定义 3.1.2 中 $(1^k), (2), (5)$ 的三个等式. 对任意的 $z \in X$, 分解为 $z = z_1 + z_2$, 满足 $z_1 \in N(T^k)$ 和 $z_2 \in R(T^k)$. 因为 $R(T^k) = R(T^{k+1})$, 则存在 $t \in X$ 满足 $z_2 = T^{k+1}t$, 从而

$$\begin{aligned} T^{k+1}Sz &= T^{k+1}\widehat{T}^{-1}T^k z = T^{k+1}\widehat{T}^{-1}T^k z_2 \\ &= T^{k+1}\widehat{T}^{-1}T^{k+1}(T^k t) \\ &= T^{k+1}(T^k t) = T^k z_2 = T^k z, \end{aligned}$$

即 $T^{k+1}S = T^k$.

$$\begin{aligned} STSz &= ST\widehat{T}^{-1}T^k z = ST\widehat{T}^{-1}T^k z_2 \\ &= ST\widehat{T}^{-1}T^{k+1}(T^k t) \\ &= STT^k t = \widehat{T}^{-1}T^k z_2 \\ &= \widehat{T}^{-1}T^k z = Sz, \end{aligned}$$

即 $STS = S$.

$$\begin{aligned}TSz &= T\widehat{T}^{-1}T^kz = T\widehat{T}^{-1}T^kz_2,\\ &= T\widehat{T}^{-1}T^{k+1}(T^kt) = T^{k+1}t = z_2,\\ STz &= \widehat{T}^{-1}T^{k+1}z = \widehat{T}^{-1}T^{k+1}z_2 = z_2,\end{aligned}$$

从而 $TS = ST$. 由此， S 满足定义 3.1.2 中 $(1^k),(2),(5)$. 因此 $S = T^D$ 为 T 的 Drazin 广义逆.

如果 $R(T^k)$ 为闭的，由 Banach 逆算子定理，可得 $T^D \in \mathscr{L}(X)$. □

引理 3.2.2 设 X 为 Banach 空间， $T \in \mathscr{L}(X)$, 如果 T 为可逆算子，则存在复平面上的开集 $\Omega \supset \sigma(T)$ 和零点的邻域 V, 使得

$$V \cap \Omega = \varnothing.$$

证明 首先证 $0 \notin \sigma(T)$. 否则 $0 \in \sigma(T)$, 与 T 可逆矛盾. 由于 $\sigma(T)$ 为复平面上的有界紧子集，而 $\{0\}$ 为闭集，从而存在 0 的邻域 V 使

$$(0 + V) \cap (\sigma(T) + V) = \varnothing.$$

显然 $\Omega = \sigma(T) + V = \cup(\lambda + V : \lambda \in \sigma(T))$ 为复平面上的开集. □

定理 3.2.1(表示定理) 设 $T \in \mathscr{L}(X)$ 且 $\mathrm{Ind}(T) = k, R(T^k)$ 在 X 中闭，$\widehat{T} = T^{k+1}|_{R(T^k)}$. 若 $\{S_n(z)\}$ 是除零点外的某个开集 $\Omega \supset \sigma(\widehat{T})$ 上的解析函数列，且 $\lim_{n\to\infty} S_n(z) = \dfrac{1}{z}$ 在 $\sigma(\widehat{T})$ 上一致成立，则

$$T^D = \lim_{n\to\infty} S_n(\widehat{T})T^k, \tag{3.2.1}$$

这里 $\sigma(\widehat{T})$ 为 $\widehat{T}$ 的谱集.

证明 由假设及 [Ru] 中定理 10.27, 可知 $\lim_{n\to\infty} S_n(\widehat{T}) = \widehat{T}^{-1}$ 在 $\mathscr{L}(R(T^k))$ 中成立. 由引理 3.2.1, 有

$$T^D = \lim_{n\to\infty} S_n(\widehat{T})T^k.$$ □

用 $\sigma(T)$ 表示 $T \in \mathscr{L}(X)$ 的谱集，$\rho(T)$ 为 T 的正则集. 若 $\varphi(\lambda)$ 为复平面上开集 $\Omega \supset \sigma(T)$ 上的解析函数，则定义

$$\varphi(T) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \varphi(\lambda)(\lambda I - T)^{-1}d\lambda, \tag{3.2.2}$$

其中 Γ 为 Ω 中任意环绕 $\sigma(T)$ 的封闭曲线.

定理 3.2.2 (表示定理) 设 X 为 Banach 空间，$T \in \mathscr{L}(X)$, $\mathrm{Ind}(T) = k$, $R(T^k)$ 为闭的. 记 $\widetilde{T} = T^k|_{R(T^k)} \in \mathscr{L}(R(T^k))$. 若 $\varphi_n(\lambda)$ 为复平面上除零点外的某个开集 $\Omega \supset \sigma(\widetilde{T})$ 上的解析函数列，$\varphi_n(\lambda) \to \dfrac{1}{\lambda}(n \to \infty)$ 于 $\sigma(\widetilde{T})$ 上一致成立，则

$$T^D = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\widetilde{T})QT^{k-1} \tag{3.2.3}$$

在 $\mathscr{L}(R(T^k))$ 内成立，其中 Q 为沿 $N(T^k)$ 到 $R(T^k)$ 上的有界线性投影算子，且如果对任给 $\varepsilon > 0, \varphi_n(\lambda)$ 在圆 $\{z: |z| < \|\widetilde{T}\| + \varepsilon\}$ 内除零外解析，则

$$\begin{aligned}&\|\varphi_n(\widetilde{T})QT^{k-1} - T^D\| \\ \leqslant &\left(\frac{2\|\widetilde{T}\| + \varepsilon}{\varepsilon}\right) \sup_{\lambda\in\Gamma_{\|\widetilde{T}\|+\frac{\varepsilon}{2}}} |\varphi_n(\lambda)\lambda - 1| \cdot \|T^D\| \\ &+ \delta\|\widetilde{T}^{-1}\| \sup_{\lambda\in\Gamma_\delta} |\varphi_n(\lambda)\lambda - 1| \cdot \|T^D\|,\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

其中 $\Gamma_{\|\widetilde{T}\|+\frac{\varepsilon}{2}}$ 为 $\left\{z: |z| < \|\widetilde{T}\| + \dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$ 的边界，$\delta = \min\left\{\dfrac{1}{2\|\widetilde{T} - 1\|}, \varepsilon_1\right\}$，$\varepsilon_1$ 为 $\{z: |z| < \varepsilon_1\} \cap \sigma(\widetilde{T}) = \varnothing$ 的最大者，Γ_δ 为圆 $\{z: |z| < \delta\}$ 的边界.

证明　由于 $T^{k+}|_{R(T^k)}$ 在 $R(T^k)$ 上为 $\widetilde{T} = T^k|_{R(T^k)}$ 的逆算子，应用 [Ru] 定理 10.27, 得

$$T^{k+}|_{R(T^k)} = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\widetilde{T})$$

于 $\mathscr{L}(X)$ 中成立. 故由 $T^{k+}T^kT^{k+} = T^{k+}|_{R(T^k)}Q$, 由定理 3.1.5, 有

$$T^D = T^{k+}T^{k-1} = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\widetilde{T})QT^{k-1}.$$

下面估计误差界. 因 $R(T^{k+}) = R(T^k), N(T^{k+}) = N(T^k)$, 有

$$\begin{aligned}\varphi_n(\widetilde{T})QT^{k-1} &= \varphi_n(\widetilde{T})T^kT^{k+}T^{k-1} \\ &= \varphi_n(\widetilde{T})T^k|_{R(T^k)}T^{k+}T^{k-1},\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\|\varphi_n(\widetilde{T})QT^{k-1} - T^D\| &= \|\varphi_n(\widetilde{T})\widetilde{T}T^{k+}T^{k-1} - T^D\| \\ &= \|\varphi_n(\widetilde{T})\widetilde{T}T^D - T^D\| \\ &\leqslant \|\varphi_n(\widetilde{T})\widetilde{T} - \widetilde{I}\|\|T^D\|,\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

其中 $\widetilde{I}$ 为 $\mathscr{L}(R(T^k))$ 中单位元. 由 (3.2.2), 有

$$\varphi_n(\widetilde{T})\widetilde{T} - \widetilde{I} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_{\|\widetilde{T}\|+\frac{\varepsilon}{2}}+\Gamma_\delta} (\varphi(\lambda)\lambda - 1)(\lambda\widetilde{I} - \widetilde{T})^{-1}d\lambda. \tag{3.2.6}$$

由 Hahn-Banach 定理，存在 $\mathscr{L}(R(T^k))$ 上的有界线性泛函 F, 使 $\|F\| = 1$ 且

$$F(\varphi_n(\widetilde{T})\widetilde{T} - \widetilde{I}) = \|\varphi_n(\widetilde{T})\widetilde{T} - \widetilde{I}\|,$$

由 [XWY] 中第五章定理 2 知，当 $|\lambda| > \|\widetilde{T}\|$ 时，$\|(\lambda\widetilde{I} - \widetilde{T})^{-1}\| \leqslant 1/(|\lambda| - \|\widetilde{T}\|)$. 由引理 3.2.2,$0 \notin \sigma(\widetilde{T})$, 存在含零点的开集 V 及开集 $\Omega \supset \sigma(\widetilde{T}), V \cap \Omega = \varnothing$. 由 [XWY] 中第五章定理 1, 知当 $|\lambda| = \delta$ 时

$$\begin{aligned}\|(\lambda\widetilde{I}-\widetilde{T})^{-1}\| &= \|\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i(0\cdot\widetilde{I}-\widetilde{T})^{-(i+1)}(\lambda-0)^i\| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{\infty}\|(\widetilde{T})^{-1}\|^{i+1}|\lambda|^i \\ &\leqslant \|\widetilde{T}^{-1}\|\sum_{i=0}^{\infty}(\|(\widetilde{T})^{-1}\||\lambda|)^i \\ &\leqslant \|\widetilde{T}^{-1}\|,\end{aligned}$$

从而，由 (3.2.6), 有

$$\begin{aligned}&\|\varphi_n(\widetilde{T})\widetilde{T}-\widetilde{I}\| = |F(\varphi_n(\widetilde{T})\widetilde{T}-\widetilde{I})| \\ =& \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_{\|\widetilde{T}\|+\frac{\varepsilon}{2}}+\Gamma_\delta}(\varphi_n(\lambda)\lambda-1)F((\lambda\widetilde{I}-\widetilde{T})^{-1})d\lambda\right| \\ \leqslant& \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma_{\|\widetilde{T}\|+\frac{\varepsilon}{2}}}|\varphi_n(\lambda)\lambda-1||\wedge((\lambda\widetilde{I}-\widetilde{T})^{-1})|d\lambda \\ &+\frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma_\delta}|\varphi_n(\lambda)\lambda-1||\wedge((\lambda\widetilde{I}-\widetilde{T})^{-1})|d\lambda \\ \leqslant& \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma_{\|\widetilde{T}\|+\frac{\varepsilon}{2}}}|\varphi_n(\lambda)\lambda-1|\|(\lambda\widetilde{I}-\widetilde{T})^{-1}\|d\lambda \\ &+\frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma_\delta}|\varphi_n(\lambda)\lambda-1|\|((\lambda\widetilde{I}-\widetilde{T})^{-1})\|d\lambda \\ \leqslant& \frac{1}{2\pi(\|\widetilde{T}\|+\frac{\varepsilon}{2}-\|\widetilde{T}\|)}\oint_{\Gamma_{\|\widetilde{T}\|+\frac{\varepsilon}{2}}}|\varphi_n(\lambda)\lambda-1|d\lambda \\ &+\frac{1}{2\pi}\|\widetilde{T}^{-1}\|\oint_{\Gamma_\delta}|\varphi_n(\lambda)\lambda-1|ds \\ \leqslant& \frac{2\|\widetilde{T}\|+\varepsilon}{\varepsilon}\sup_{\lambda\in\Gamma_{\|\widetilde{T}\|+\frac{\varepsilon}{2}}}|\varphi_n(\lambda)\lambda-1| \\ &+\delta\|\widetilde{T}^{-1}\|\sup_{\lambda\in\Gamma_\delta}|\varphi_n(\lambda)\lambda-1|,\end{aligned}\tag{3.2.7}$$

结合 (3.2.5) 与 (3.2.7), 得 (3.2.4).

§3.3 Drazin 广义逆的扰动与连续性

1. Drazin 广义逆的扰动

定理 3.3.1 设 $M = T - E, T, E \in \mathscr{L}(X)$, 且 $\mathrm{Ind}(T) = k$. 假设 $R(T^k)$ 和 $R(M^k)$ 在 X 中闭. 如果 $E = TT^DE$ 且 $\|T^DE\| < 1$, $Z = I - T^DE$. 则 $\mathrm{Ind}(M) = k$, 及

$$M^D = T^D + T^D E Z^{-1} T^D - \sum_{i=0}^{k-1} (T^D + T^D E Z^{-1} T^D)^{i+2} E (I - TT^D) T^i, \tag{3.3.1}$$

$$\frac{\|M^D - T^D\|}{\|T^D\|} \leqslant \frac{\|T^D E\|}{1 - \|T^D E\|} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k_D(T)^{i+1}}{(1 - \|T^D E\|)^{i+2}} \cdot \frac{\|E\|}{\|T\|} \cdot \|I - TT^D\|, \tag{3.3.2}$$

其中 $k_D(T) = \|T\|\|T^D\|$ 定义为 Drazin 逆的条件数.

证明　设 S 是 (3.3.1) 的右端，则经计算，并注意 $T^D E = I - Z, E = TT^D E$, 有

$$\begin{aligned}
MS &= MT^D + MT^D E Z^{-1} T^D \\
&\quad - \sum_{i=0}^{k-1} M (T^D + T^D E Z^{-1} T^D)^{i+2} E (I - TT^D) T^i \\
&= MT^D + MT^D E Z^{-1} T^D \\
&\quad - \sum_{i=0}^{k-1} T (T^D + T^D E Z^{-1} T^D)^{i+2} E (I - TT^D) T^i \\
&\quad + \sum_{i=0}^{k-1} E (T^D + T^D E Z^{-1} T^D)^{i+2} E (I - TT^D) T^i \\
&= (T - E) T^D + (T - E) T^D E Z^{-1} T^D \\
&\quad - \sum_{i=0}^{k-1} T (T^D + T^D E Z^{-1} T^D)^{i+2} E (I - TT^D) T^i \\
&\quad + \sum_{i=0}^{k-1} E (T^D + T^D E Z^{-1} T^D)^{i+2} E (I - TT^D) T^i \\
&= TT^D - T (T^D + T^D E Z^{-1} T^D) \\
&\quad \cdot \sum_{i=0}^{k-1} (T^D + T^D E Z^{-1} T^D)^{i+1} E (I - TT^D) T^i \\
&\quad + E (T^D + T^D E Z^{-1} T^D) \\
&\quad \cdot \sum_{i=0}^{k-1} (T^D + T^D E Z^{-1} T^D)^{i+1} E (I - TT^D) T^i \\
&= TT^D - \sum_{i=0}^{k-1} (T^D + T^D E Z^{-1} T^D)^{i+1} E (I - TT^D) T^i \\
&\quad - [E Z^{-1} T^D - E (T^D + T^D E Z^{-1} T^D)] \sum_{i=0}^{k-1} (T^D + T^D E Z^{-1} T^D)^{i+1} \\
&\quad \cdot E (I - TT^D) T^i.
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}E(T^D+T^DEZ^{-1}T^D) &= ET^D+ET^DEZ^{-1}T^D\\ &= [EZ+E(I-Z)]Z^{-1}T^D\\ &= EZ^{-1}T^D.\end{aligned}$$

于是

$$MS = TT^D - \sum_{i=0}^{k-1}(T^D+T^DEZ^{-1}T^D)^{i+1}E(I-TT^D)T^i.$$

类似可得

$$SM = TT^D - \sum_{i=0}^{k-1}(T^D+T^DEZ^{-1}T^D)^{i+1}E(I-TT^D)T^i.$$

$$SMS = S.$$

对于 $m \geqslant k = \operatorname{Ind}(T)$, 可以验证 $M^{m+1}S = M^m$, 因此 $\operatorname{Ind}(M) = k$ 且 $M^D = S$, 即 (3.3.1) 式成立.

因为 $\|Z^{-1}\| = \|(I-T^DE)^{-1}\| \leqslant \dfrac{1}{1-\|T^DE\|}$, 从而, 由 (3.3.1), 有

$$\|M^D - T^D\| \leqslant \frac{\|T^DE\|\cdot\|T^D\|}{1-\|T^DE\|}$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1}[\|Z+T^DE\|\cdot\|Z^{-1}\|\cdot\|T^D\|]^{i+2}\|E\|\cdot\|I-TT^D\|\cdot\|T\|^i.$$

令 $k_D(T) = \|T\|\|T^D\|$, 则

$$\frac{\|M^D-T^D\|}{\|T^D\|} \leqslant \frac{\|T^DE\|}{1-\|T^DE\|} + \sum_{i=0}^{k-1}\frac{k_D(T)^{i+1}}{(1-\|T^DE\|)^{i+2}}\cdot\frac{\|E\|}{\|T\|}\cdot\|I-TT^D\|,$$

(3.3.2) 为真. □

定理 3.3.2 设 $M = T-E, T, E \in \mathscr{L}(X)$ 且 $\operatorname{Ind}(T) = k$. 假设 $R(T^k)$ 和 $R(M^k)$ 在 X 中闭. 如果 $E = ETT^D$, $\|ET^D\| < 1$, 且 $Z = 1 - ET^D$, 则 $\operatorname{Ind}(M) = k$, 及

$$M^D = T^D + T^DZ^{-1}ET^D - \sum_{i=0}^{k-1}(I-TT^D)T^iE(T^D+T^DZ^{-1}ET^D)^{i+2}, \qquad (3.3.3)$$

$$\frac{\|M^D-T^D\|}{\|T^D\|} \leqslant \frac{\|ET^D\|}{1-\|ET^D\|} + \sum_{i=0}^{k-1}\frac{k_D(T)^{i+1}}{(1-\|ET^D\|)^{i+2}}\cdot\frac{\|E\|}{\|T\|}\cdot\|I-TT^D\|. \qquad (3.3.4)$$

证明 类似定理 3.3.1 证明. □

注记 应指出定理 3.3.1 和定理 3.3.2 中扰动算子 E 的存在性. 例如, 可取 $E = T^kB$ 或 $E = CT^k$, 其中 $B, C \in \mathscr{L}(X)$. 易验证 $E = TT^DE$ 或 $E = ETT^D$.

推论 3.3.3 设 $M=T-E, T, E\in\mathscr{L}(X)$, 且 $\operatorname{Ind}(T)=k$. 假设 $R(T^k)$ 和 $R(M^k)$ 在 X 中闭. 如果 $E=TT^DE=ETT^D$ 且 $\|T^DE\|<1$, 则 $\operatorname{Ind}(M)=k$, 且

$$M^D=(I-T^DE)^{-1}T^D=T^D(I-ET^D)^{-1},$$

$$\frac{\|M^D-T^D\|}{\|T^D\|}\leqslant\frac{\|T^DE\|}{1-\|T^DE\|}.$$

证明 由定理 3.3.1 及 $TT^DE=E$ 得 $\operatorname{Ind}(M)=k$. 且由 (3.3.1), 有

$$M^D=T^D+T^DEZ^{-1}T^D-\sum_{i=0}^{k-1}(T^D+T^DEZ^{-1}T^D)^{i+2}E(I-TT^D)T^i.$$

又因 $E=ETT^D$, 则 $E(I-TT^D)=\theta$, 从而有

$$M^D=(Z+T^DE)Z^{-1}T^D,$$

其中 $Z=I-T^DE$. 于是

$$M^D=(I-T^DE)^{-1}T^D=T^D(I-T^DE)^{-1},$$

且

$$\|M^D-T^D\|\leqslant\|(I-T^DE)^{-1}-I\|\|T^D\|,$$

于是

$$\frac{\|M^D-T^D\|}{\|T^D\|}\leqslant\frac{\|T^DE\|}{1-\|T^DE\|}.$$

□

推论 3.3.4 设 $M=T-E, T, E\in\mathscr{L}(X)$ 且 $\operatorname{Ind}(T)=1$. 假设 $R(T)$ 和 $R(M)$ 在 X 中闭. 若 $E=ETT^g$ 和 $Z=I-ET^g$ 可逆, 则 $\operatorname{Ind}(M)=1$, 且

$$M^g=T^g+T^gET^gZ^{-1}+(I-TT^g)Z^{-1}T^gZ^{-1},$$

这里 T^g, M^g 为 T, M 的群逆.

证明 略去不证. □

定理 3.3.5 设 X 为 Banach 空间, $M=T-E, T, E\in\mathscr{L}(X)$ 且 $\operatorname{Ind}(T)=k, \operatorname{Ind}(M)=j, R(T^k)$ 和 $R(T^j)$ 闭. 若 $\|(T^l)^D(T^l-M^l)\|=\Delta<1$, 且 $\dim N(T^l)=\dim N(M^l)<\infty$ 或 $R(M^l)\cap N(T^{l+})=\{\theta\}$, 则

$$\frac{\|M^D-T^D\|}{\|T^D\|}\leqslant\frac{k_{l-1}}{1-\Delta}(\Delta+E_{l-1}),$$

其中 $l=\max\{k,j\}, k_{l-1}=\|T^{l-1}\|\|T^{(l-1)D}\|$ 是 T^{l-1} 的 Drazin 逆的条件数, $E_{l-1}=\dfrac{\|M^{l-1}-T^{l-1}\|}{\|T^{l-1}\|}$.

证明 由定理 2.3.3 可知

$$M^{l+}=[I-T^{l+}(T^l-M^l)]^{-1}T^{l+}.$$

又由引理 3.1.2, $T^{l+}=T^{l_D}, M^{l+}=M^{l_D}$. 从而由定理 3.1.5, 有

$$\begin{aligned}M^D &= M^{l+}M^{l-1}=M^{l_D}M^{l-1}=M^{l-1}M^{l_D}\\&=M^{l-1}[I-T^{l_D}(T^l-M^l)]^{-1}T^{l_D},\\M^D-T^D&=M^{l-1}[I-T^{l_D}(T^l-M^l)]^{-1}T^{l_D}-T^{l-1}[I-T^{l_D}(T^l-M^l)]^{-1}T^{l_D}\\&\quad+T^{l-1}[I-T^{l_D}(T^l-M^l)]^{-1}T^{l_D}-T^{l-1}T^{l_D}\\&=[M^{l-1}-T^{l-1}][I-T^{l_D}(T^l-M^l)]^{-1}T^{l_D}\\&\quad+T^{l-1}\{[I-T^{l_D}(T^l-M^l)]^{-1}-I\}T^{l_D}.\end{aligned}$$

两端取范数, 得到

$$\begin{aligned}&\|M^D-T^D\|\\&\leqslant\frac{\|T^{l_D}\|}{1-\Delta}\|M^{l-1}-T^{l-1}\|+\frac{\Delta}{1-\Delta}\|T^{l-1}\|\|T^{l_D}\|\\&\leqslant\left(\frac{\|M^{l-1}-T^{l-1}\|}{\|T^{l-1}\|}\|T^{l-1}\|\|T^{(l-1)D}\|+\Delta\|T^{l-1}\|\|T^{(l-1)D}\|\right)\frac{\|T^D\|}{1-\Delta}\\&=\frac{k_{l-1}}{1-\Delta}(E_{l-1}+\Delta)\|T^D\|,\end{aligned}$$

其中 $k_{l-1}=\|T^{l-1}\|\|T^{(l-1)D}\|$, $E_{l-1}=\dfrac{\|M^{l-1}-T^{l-1}\|}{\|T^{l-1}\|}$. □

2. Drazin 广义逆的连续性

设 X 为 Banach 空间, 对于 $T\in\mathscr{L}(X)$, 由第二章所引入的 T 的最小模:

$$r(T)=\inf\{\|Tx\|:\ \operatorname{dist}(x,N(T))=1\}.$$

易知 $R(T)$ 为闭的当且仅当 $r(T)>0$, 且又有关系式 $1/r(T)=k(T)$, 其中 $k(T)=\sup\{\inf\{\ \|x\|\ :Tx=y\}:y\in R(T),\ \|y\|=1\}$. 为引用方便, 列出 A.S.Markus 的一个周知结果 ([Ko], 定理 2).

定理 3.3.6 设 $A,A_n\in\mathscr{L}(X),R(A)$ 与 $R(A_n)$ 为闭的, 且设 $A_n\to A(n\to\infty)$, 则下述命题等价

(i) $\sup\limits_n k(A_n)<\infty$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}k(A_n)=k(A)$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\widehat{\delta}(N(A_n),N(A))=0$;

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\widehat{\delta}(R(A_n),R(A))=0$.

证明 见 [Ko]. □

引理 3.3.1 设 X 为 Banach 空间, M,N 为 X 的拓扑可补子空间, P,Q 分别为 X 到 M,N 上的有界线性投影算子, 则

$$\widehat{\delta}(M,N) \leqslant \max\{\|(P-Q)P\|, \|(Q-P)Q\|\}.$$

证明　任取 $u \in M, \|u\| = 1$, 有 $u = Pu$, 且

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(u,N) &\leqslant \|u - Qu\| \\ &= \|Pu - Qu\| = \|(P-Q)Pu\| \\ &\leqslant \|(P-Q)P\|. \end{aligned}$$

故

$$\delta(M,N) \leqslant \|(P-Q)P\|.$$

同理

$$\delta(N,M) \leqslant \|(Q-P)Q\|,$$

于是

$$\widehat{\delta}(M,N) \leqslant \max\{\|(P-Q)P\|, \|(Q-P)Q\|\}. \qquad \square$$

引理 3.3.2　设 X 为 Banach 空间，$C \in \mathscr{L}(X), \operatorname{Ind}(C) \leqslant 1$, 则

$$\|C^D\| \leqslant k(C)\|CC^D\|^2. \tag{3.3.5}$$

证明　因为 $\operatorname{Ind}(C) \leqslant 1$, 则 X 有拓扑直和分解

$$X = R(C) \oplus N(C),$$

且存在 C 的 Drazin 广义逆 C^D(群逆) 使得 CC^D 为沿 $N(C)$ 到 $R(C)$ 上的有界线性投影算子.

对任意 $x \in X$,$y \in N(C)$, 有

$$\|C^DC(x-y)\| = \|C^DCx\| \leqslant \|C^DC\|\|x-y\|.$$

由此导出

$$\operatorname{dist}(x, N(C)) \geqslant \frac{\|C^DCx\|}{\|C^DC\|},$$

于是由 $r(C)$ 的定义，有

$$\|Cx\| \geqslant r(C)\operatorname{dist}(x,N(C)) \geqslant r(C)\frac{\|C^DCx\|}{C^DC\|}.$$

又对任意 $z \in X$, 取 $x = C^Dz$, 得

$$\|CC^Dz\| \geqslant r(C)\frac{\|C^DCC^Dz\|}{\|C^DC\|},$$

由此导出

$$\|C^Dz\| \leqslant \frac{1}{r(C)}\|CC^D\|^2\|z\|.$$

注意到 $k(C) = 1/r(C)$, 从而

$$\|C^D\| \leqslant k(C)\|CC^D\|^2.$$
□

引理 3.3.3 设 $T \in \mathscr{L}(X)$ 具有 Drazin 广义逆. 如果 $T = C + N$ 为 T 的核心 - 幂零分解, 则

$$\{\lambda \in \mathbb{C}:\ 0 < |\lambda| < r(C)\} \subset \rho(T).$$

证明 由定理 3.1.7 中 (i), $\mathrm{Ind}(C) \leqslant 1$, 我们有 $X = R(C) \oplus N(C)$ 且 $R(C)$ 为 X 的闭子空间. 令 $X_0 = R(C), X_1 = N(C)$, 且 C_0 与 C_1 分别为 C 向 X_0, X_1 上的限制. $C_0:\ X_0 \to X_0$ 为可逆算子, 且经直接计算 $r(C) = \|C_0^{-1}\|^{-1}$.

对于任意的 $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < r(C)$. 有 $1/|\lambda| > \|C_0^{-1}\|$, 即 $1/\lambda \in \rho(C_0^{-1})$. 由 $(C_0 - \lambda I) = \lambda[(1/\lambda)I - C_0^{-1}]C_0$, 可知 $C_0 - \lambda I$ 为可逆算子. 又因为 C_1 为幂零算子, 从而其谱半径 $r(C_1) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|C_1^n\|} = 0$, 于是对所有的 $\lambda \neq 0, C_1 - \lambda I$ 均为可逆算子, 故当 $0 < |\lambda| < r(C)$ 时, $\lambda \in \rho(C)$.

由于 N 为幂零的, 且 $NC = CN = \theta$, 从而 $\sigma(T) = \sigma(C)$, 因此

$$\{\lambda \in \mathbb{C}:\ 0 < |\lambda| < r(C)\} \subset \rho(C) = \rho(T).$$
□

定理 3.3.7 设 $\{T_n\}$ 为 $\mathscr{L}(X)$ 中序列, 且 $T_n \to T \in \mathscr{L}(X)(n \to \infty)$. 假定 T 与 T_n 具有 Drazin 广义逆 T^D 与 $T_n^D(n = 1, 2, \cdots)$, 且设 $T = C + N$ 与 $T_n = C_n + N_n(n = 1, 2, \cdots)$ 分别为 T 与 T_n 的核心 - 幂零分解, 则下述等价:

(i) $T_n^D \to T^D$;

(ii) $T_n^D T_n \to T^D T$;

(iii) $\sup_n \|T_n^D\| < \infty$;

(iv) $\widehat{\delta}(N(C_n), N(C)) \to 0$ 且 $\widehat{\delta}(R(C_n), R(C)) \to 0$;

(v) $C_n \to C$ 且 $\widehat{\delta}(R(C_n), N(C)) \to 0$;

(vi) $C_n \to C$ 且 $\widehat{\delta}(N(C_n), N(C)) \to 0$;

(vii) $C_n \to C$ 且 $\sup_n k(C_n) < \infty$;

(viii) $\sup_n k(C_n) < \infty$.

证明 (i)⇒(ii). 显然.

(ii)⇒(i). 因为 $C_n = T_n T_n^D T_n$ 且 $C = TT^DT$, 则 (ii) 蕴涵 $C_n \to C$. 因为由定理 3.1.7 中 (i),$\mathrm{Ind}(C) \leqslant 1$, 我们有 $X = R(C) \oplus N(C)$ 且 $R(C)$ 为 X 的闭子空间. 因为 T 具有 Drazin 逆, 故 $k = \mathrm{Ind}(T) < \infty$. 由定理 3.1.5 的证明及定理 3.1.7, 知

$$R(T^k) = R(TT^D) = R(C), \tag{3.3.6}$$

$$N(T^k) = N(TT^D) = N(C). \tag{3.3.7}$$

由引理 3.3.2, 有

$$\|C^D\| \leqslant k(C)\|CC^D\|^2. \tag{3.3.8}$$

以 C_n 代替 C, 由 (3.3.8) 得

$$\|C_n^D\| \leqslant k(C_n)\|C_nC_n^D\|^2, \quad n=1,2,\cdots. \tag{3.3.9}$$

又由引理 3.3.1 及 (ii), 有

$$\begin{aligned}
&\widehat{\delta}(R(C_n), R(C)) \\
&= \widehat{\delta}(R(T_nT_n^D), R(TT^D)) \\
&\leqslant \max\{\|(TT^D - T_nT_n^D)TT^D\|, \|(TT^D - T_nT_n^D)T_nT_n^D\|\} \\
&\to 0.
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

于是由定理 3.3.6 及 (3.3.10) 式，得

$$\sup_n k(C_n) < \infty. \tag{3.3.11}$$

由定理 3.1.7 中 (vii), 有

$$C_n^D = T_n^D, \quad n=1,2,\cdots,$$

于是

$$C_nC_n^D = T_nT_n^DT_nT_n^D = T_nT_n^D, \quad n=1,2,\cdots.$$

由 (ii), 得

$$\sup_n \|C_nC_n^D\| = \sup_n \|T_nT_n^D\| < \infty. \tag{3.3.12}$$

再由 (3.3.9),(3.3.11) 及 (3.3.12) 式，有

$$\sup_n \|T_n^D\| = \sup_n \|C_n^D\| \leqslant \sup_n k(C_n)\cdot \sup_n \|C_nC_n^D\| < \infty, \tag{3.3.13}$$

从而由 (ii), 得到

$$\begin{aligned}
T_n^D - T^D &= T_n^D(T_nT_n^D - TT^D) + (T_nT_n^D - TT^D)T^D + T_n^D(T - T_n)T^D \\
&\to 0, \quad n\to\infty.
\end{aligned}$$

因此 (i) 为真.

(ii)⇒(iii). 此为 (3.3.13).

(iii)⇒(ii). 由定理 3.1.7,$T^D = C^D$ 且 $CC^DC = C$, 于是对任意 $x\in X$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(x, N(C)) &\leqslant \|x - (I - C^DC)x\| \\
&= \|C^DCx\| \\
&\leqslant \|C^D\|\|Cx\|.
\end{aligned}$$

由 $r(C)$ 的定义，有

$$r(C) \geqslant \|C^D\|^{-1},$$

即

$$\|C^D\| \geqslant 1/r(C) = k(C).$$

因此

$$\|C_n^D\| \geqslant 1/r(C_n) = k(C_n), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

由 (iii), 知

$$\inf_n r(C_n) = r > 0. \tag{3.3.14}$$

令 $\delta = \min\{r, r(C)\}$ 及 $\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \delta/2\}$. 由引理 3.3.3, 有

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\lambda| < \delta\} \subset \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \rho(T_n)\right) \cap \rho(T).$$

由于

$$I - TT^D = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (\lambda I - T)^{-1} d\lambda$$

与

$$I - T_n T_n^D = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (\lambda I - T_n)^{-1} d\lambda, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

于是

$$\begin{aligned}
&(I - TT^D) - (I - T_n T_n^D) \\
&= T_n T_n^D - TT^D \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma [(\lambda I - T)^{-1} - (\lambda I - T_n)^{-1}] d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (\lambda I - T_n)^{-1} [(\lambda I - T_n) - (\lambda I - T)] (\lambda I - T)^{-1} d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (\lambda I - T_n)^{-1} [T - T_n] (\lambda I - T)^{-1} d\lambda.
\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

因为 $(\lambda I - T_n)^{-1} \to (\lambda I - T)^{-1}$ 一致于 $\lambda \in \Gamma$, 故存在 $n_0 \geqslant 1$, 使

$$\sup_{n \geqslant n_0} \{\|(\lambda I - T_n)^{-1}\| : \lambda \in \Gamma\} < \infty.$$

从而由 (3.3.15), 有常数 $M > 0$, 使

$$\|TT_n^D - TT^D\| \leqslant M \|T_n - T\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

因此 (ii) 为真.

(ii)⇒(iv). 由 (ii)⇒(i) 中 (3.3.10),

$$\widehat{\delta}(R(C_n), R(C)) \to 0, \quad n \to \infty.$$

同样, 由引理 3.3.1 及 (ii), 有

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta}(N(C_n), N(C)) &= \widehat{\delta}(N(T_n T_n^D), N(TT^D)) \\
&\leqslant \max\{\|(TT^D - T_n T_n^D)(I - TT^D)\|, \|(TT^D - T_n T_n^D)(I - T_n T_n^D)\|\} \\
&\to 0, \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

显然

$$\sup_n \|T_n^D T_n\| < \infty.$$

(iv)⇒(ii). 因为 T_n 有 Drazin 广义逆 T_n^D, 设 $\mathrm{Ind}(T_n) = k_n$, 则

$$X = R(T_n^{k_n}) \oplus N(T_n^{k_n}),\ n = 1, 2, \cdots,$$

且

$$R(T_n^{k_n}) = R(T_n T_n^D) = R(C_n),$$

$$N(T_n^{k_n}) = N(T_n T_n^D) = N(C_n), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

对任意 $x \in X$, 有 $y_n \in R(T_n T_n^D), z_n \in N(T_n T_n^D)$, 使 $x = y_n + z_n (n = 1, 2, \cdots)$, 于是

$$(TT^D - T_n T_n^D)x = TT^D z_n - (I - TT^D) y_n.$$

由 $TT^D z_n = TT^D(z_n - u), u \in N(TT^D)$ 及 $z_n = (I - T_n T_n^D)x$, 有

$$\begin{aligned}\|TT^D z_n\| &\leqslant \|TT^D\| \mathrm{dist}(z_n, N(TT^D)) \\ &\leqslant \|TT^D\| \widehat{\delta}(N(T_n T_n^D), N(TT^D)) \|z_n\| \\ &\leqslant \|TT^D\| \widehat{\delta}(N(C_n), N(C)) \|I - T_n T_n^D\| \|x\|.\end{aligned}$$

类似可得

$$\|(I - TT^D) y_n\| \leqslant \|I - TT^D\| \widehat{\delta}(R(C_n), R(C)) \|T_n T_n^D\| \|x\|.$$

将以上三式结合，得

$$\begin{aligned}&\|(TT^D - T_n T_n^D)x\| \\ &\leqslant [\|TT^D\| \widehat{\delta}(N(C_n), N(C)) \|I - T_n T_n^D\| \\ &\quad + \|I - TT^D\| \widehat{\delta}(R(C_n), R(C)) \|T_n T_n^D\|] \|x\|.\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}&\|TT^D - T_n T_n^D\| \\ &\leqslant [\widehat{\delta}(N(C_n), N(C)) + \widehat{\delta}(R(C_n), R(C))] \\ &\quad \cdot \max\{\|TT^D\|, \|I - TT^D\|\} \max\{\|T_n T_n^D\|, \|I - T_n T_n^D\|\}. \qquad (3.3.16)\end{aligned}$$

引用 [Mar] p.271 与 [GM] 引理 2, 有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{\max\{\|C_n C_n^D\|, \|I - C_n C_n^D\|\}} - \frac{1}{\max\{\|CC^D\|, \|I - CC^D\|\}}\right| \\ &\leqslant 2\widehat{\delta}(N(C_n), N(C)) + 2\widehat{\delta}(R(C_n), R(C)) \\ &\to 0, \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

从而

$$\sup_n \|C_n C_n^D\| < \infty.$$

由于 $C_n^D = T_n^D$, 故 $C_n C_n^D = T_n T_n^D$, 因此

$$\sup_n \|T_n T_n^D\| < \infty.$$

由此及 (3.3.16), 得

$$T_n^D T_n \to TT^D, \quad n \to \infty.$$

故 (ii) 为真.

(v)⇒(vi)⇒(vii), 由定理 3.3.6 立得. 显然, (v) 与 (vi) 蕴涵 (iv). 由 (ii)⇒(i) 的证明, 知 (ii) 蕴涵 (v).

显然 (vii) 蕴涵 (viii).

由 (viii), $\sup_n k(C_n) < \infty$, 从而 $\inf_n r(C_n) = r > 0$, 其中 $1/r(C_n) = k(C_n)$. 由此, 与 (iii)⇒(ii) 的证明相同, 得 (ii). 完成定理的证明. □

【注 释】

Banach 空间中线性算子的 Drazin 广义逆的研究, 近 20 年获得长足发展.

§3.1 有关算子指标的介绍, 取自 [TL]. Banach 空间中线性算子 Drazin 逆的定义 3.1.2, 唯一性定理 3.1.2 及定理 3.1.7 取自 [Qi], 存在性定理 3.1.5 取自蔡东汉的论文 [Cai], 而定理 3.1.6 属于魏益民 [Wei].

§3.2 线性算子 Drazin 广义逆的表示, 最初由匡蛟勋在 [Ku] 中给出表示, 而后蔡东汉 [Cai] 与魏益民 [We1] 分别给出 Banach 空间中线性算子 Drazin 逆的不同表示, 推广了 [Ku] 中相应的结果. 本节内容取自 [Wei, Cai].

§3.3 Banach 空间中线性算子 Drazin 逆的扰动定理 3.3.1~3.3.5 均属于魏益民 [We1], 而关于 Drazin 广义逆的连续性, 取自 V.Rakočević 的论文 [Ra], 这方面结果, 还可参见 J. J. Koliha 与 V. Rakočević 的工作 [KR].

关于 Drazin 逆在偏微方程中的应用, 参见 M. Z. Nashed 与 Y. Zhao 的论文 [NZ]. 关于 Drazin 逆的计算问题, 参见 2004 年出版的王国荣, 魏益民, 乔三正合著的专著 [WWQ]. 关于闭线性算子的 Drazin 广义逆及其扰动, 参见 [KT] 及 [GKW].

第四章　线性算子的度量广义逆

设 X, Y 为 Banach 空间， $T \in L(X,Y)$ 为线性算子. 元素 $x_0 \in D(T) \subset X$ 称为 $T(x) = y$ 的极值解是指 $x = x_0$ 为泛函 $x \mapsto \|T(x) - y\|$ 的最小值点，最小范数的极值解叫最佳逼近解或最小范数极值解. 当 X, Y 均为 Hilbert 空间时，最佳逼近解又叫最小二乘解.

如所周知，对 $y \in Y$, 算子方程 $Tx = y$ 并不永远存在极值解，即使 $Tx = y$ 具有极值解，也不必有最佳逼近解，因此，我们需要研究 T 的度量广义逆.

§4.1　集值度量广义逆及其选择

1. 集值度量广义逆

M. Z. Nashed 与 G. F. Votruba[NV] 引进如下的定义：

定义 4.1.1　设 X, Y 为 Banach 空间， $T \in L(X,Y)$ 为线性算子. 集值映射 $T^{\partial} : Y \to D(T)$ 定义为

$$T^{\partial}(y) = \{x_0 \in D(T) : x_0 \text{ 为} T(x) = y \text{ 的最佳逼近解}\}, y \in D(T^{\partial}), \tag{4.1.1}$$

称为 T 的集值度量广义逆，其中

$$D(T^{\partial}) = \{y \in Y : T(x) = y \text{ 在} D(T) \text{ 中有最佳逼近解}\}. \tag{4.1.2}$$

若单值算子 T^{σ} (一般为非线性) : $D(T^{\partial}) \to D(T)$ 满足：$\forall y \in D(T^{\partial}), T^{\sigma}(y) \in T^{\partial}(y)$, 则称 T^{σ} 为 T^{∂} 的单值选择.

1974 年， M. Z. Nashed 与 G. V. Votruba 提出研究这一问题的建议 (见 [NV]).

定理 4.1.1　设 X, Y 为自反 Banach 空间， $T \in L(X,Y)$ 为具有闭值域的稠定闭线性算子或定义在 X 上的有界线性算子. 则 $D(T^{\partial}) = Y$, 且 $\forall y \in Y$, 有

$$T^{\partial}(y) = \mathcal{P}(T^{-1}\mathcal{P}_{R(T)}(y) : \theta), \tag{4.1.3}$$

其中 $T^{-1}\mathcal{P}_{R(T)}(y) = \{x \in D(T) : T(x) \in \mathcal{P}_{R(T)}(y)\}$.

证明　首先证 $D(T^{\partial}) = Y$, 由 Y 自反，且 $R(T)$ 闭. 从而由 [Si] 知 $R(T)$ 为 Y 的迫近子空间. 于是对每个 $y \in Y$, $\mathcal{P}_{R(T)}(y)$ 为 Y 的非空子集. 易知 $\mathcal{P}_{R(T)}(y)$ 为 Y 的闭凸子集.

下面证： $T^{-1}\mathcal{P}_{R(T)}(y)$ 为 X 的非空闭凸集，从而由 X 的自反性，知其为 X 中迫近集，于是

$$\mathcal{P}(T^{-1}\mathcal{P}_{R(T)}(y) : \theta) \neq \varnothing. \tag{4.1.4}$$

事实上，由 T 的线性，知 $T^{-1}\mathcal{P}_{R(T)}(y)$ 为 X 的非空凸子集. 仅需证其闭性. 设 $\{x_n\}\subset T^{-1}\mathcal{P}_{R(T)}(y)$ 满足 $x_n\to x_0$ $(n\to\infty)$. 则 $y_n=T(x_n)\in\mathcal{P}_{R(T)}(y)$ $(n=1,2,\cdots)$. 为证 $x_0\in T^{-1}\mathcal{P}_{R(T)}(y)$，仅需证存在 $y_0\in\mathcal{P}_{R(T)}(y)$ 满足 $y_0=T(x_0)$.

由 $T^{-1}\mathcal{P}_{R(T)}(y)$ 的定义，有 $\|y_n-y\|=\inf_{z\in R(T)}\|z-y\|$ $(n=1,2,\cdots)$. 从而 $\{y_n\}$ 为 Y 的有界列. 因 Y 自反，由 Eberlein-Smulian 定理，不妨设 $y_n\xrightarrow{弱}y_0$ $(n\to\infty)$. 由 Mazur 定理 $y_0\in R(T)$, 再由范数的下半连续，有

$$\|y_0-y\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|y_n-y\|=\inf_{z\in R(T)}\|z-y\|.$$

因此 $y_0\in\mathcal{P}_{R(T)}(y)$.

下证： $y_0=T(x_0)$. 因为 T 为稠定的闭线性算子，从而 T 的共轭算子 T^* 存在，是从 Y^* 到 X^* 的稠定闭线性算子. 任取 $y^*\in D(T^*)$, 有

$$\langle y^*,y_n\rangle=\langle y^*,T(x_n)\rangle=\langle T^*(y^*),x_n\rangle,\quad n=1,2,\cdots.$$

令 $n\to\infty$, 得

$$\langle y^*,y_0\rangle=\langle T^*(y^*),x_0\rangle,$$

于是 $x_0\in D(T^{**})$ 且 $y_0=T^{**}(x_0)$. 由 X,Y 的自反及 T 的闭性，知 $T=T^{**}$, 于是 $x_0\in D(T)$ 且 $y_0=T(x_0)$.

对任意 $y\in Y$, 由 (4.1.4), 存在 $\bar{x_0}\in\mathcal{P}(T^{-1}\mathcal{P}_{R(T)}(y):\theta)$. 显然 $\bar{x_0}$ 为 $T(x)=y$ 的最佳逼近解，因此， $D(T^{\partial})=Y$, 且由定义，有

$$T^{\partial}(y)=\mathcal{P}(T^{-1}\mathcal{P}_{R(T)}(y):\theta),y\in Y.$$

因此 (4.1.3) 成立. □

定理 4.1.2 设 X,Y 为自反 Banach 空间，又设 Y 为严格凸的， $T\in L(X,Y)$ 为具有闭值域 $R(T)$ 的稠定闭线性算子或定义在 X 上的有界线性算子，则

$$T^{\partial}=(I_{D(T)}-\mathcal{P}_{N(T)})T^{-1}\pi_{R(T)},\tag{4.1.5}$$

其中 $I_{D(T)}$ 为 $D(T)$ 上的恒同映射.

证明 因为 $N(T)$, $R(T)$ 分别为自反 Banach 空间 X,Y 中的闭子空间，而 Y 为严格凸的，从而由 [Si], $N(T)$ 在 X 中为迫近的， $R(T)$ 在 Y 中为 Chebyshev 子空间.

由定理 4.1.1, 仅需证

$$\mathcal{P}(T^{-1}\pi_{R(T)}(y):\theta)=(I_{D(T)}-\mathcal{P}_{N(T)})T^{-1}\pi_{R(T)}(y).$$

任取 $x\in\mathcal{P}(T^{-1}\pi_{R(T)}(y):\theta)$, 有 $x\in T^{-1}\pi_{R(T)}(y)$ 且

$$\|x\|=\inf\{\|w\|:w\in T^{-1}\pi_{R(T)}(y)\}.\tag{4.1.6}$$

由推论 1.2.11, x 有分解式

$$x = x_1 + x_2,\ x_1 \in \mathcal{P}_{N(T)}(x),\ x_2 \in F_X^{-1}(N(T)^{\perp}),$$

于是 $T(x_2) = T(x - x_1) = T(x) = \pi_{R(T)}(y)$, 从而 $x_2 \in T^{-1}\pi_{R(T)}(y)$.

对任意 $v \in N(T)$, 有 $x_2 - v \in T^{-1}\pi_{R(T)}(y)$, 于是由 (4.1.6), 有

$$\|x_2 - (-x_1)\| = \|x\| \leqslant \|x_2 - v\|,$$

即 $-x_1 \in \mathcal{P}_{N(T)}(x_2)$. 因此

$$\begin{aligned} x = x_2 - (-x_1) &\in (I_{D(T)} - \mathcal{P}_{N(T)})(x_2) \\ &\subset (I_{D(T)} - \mathcal{P}_{N(T)})T^{-1}\pi_{R(T)}(y), \end{aligned}$$

于是，得到

$$\mathcal{P}(T^{-1}\pi_{R(T)}(y) : \theta) \subset (I_{D(T)} - \mathcal{P}_{N(T)})T^{-1}\pi_{R(T)}(y). \tag{4.1.7}$$

反之，任取 $\hat{x} \in (I_{D(T)} - \mathcal{P}_{N(T)})T^{-1}\pi_{R(T)}(y)$ $(y \in Y)$, 存在 $x' \in T^{-1}\pi_{R(T)}(y)$ 满足

$$\hat{x} \in (I_{D(T)} - \mathcal{P}_{N(T)})(x').$$

于是有 $x'' \in \mathcal{P}_{N(T)}(x')$ 满足 $\hat{x} = x' - x''$. 由此得出 $T(\hat{x}) = T(x') = \pi_{R(T)}(y)$. 因此，$\hat{x} \in T^{-1}\pi_{R(T)}(y)$.

下证：$\hat{x} \in \mathcal{P}(T^{-1}\pi_{R(T)}(y) : \theta)$.

任取 $v \in N(T)$, 令 $w = x'' + v$, 则 $w \in N(T)$. 注意到 $x'' \in \mathcal{P}_{N(T)}(x')$, 有

$$\begin{aligned} \|\hat{x} - \theta\| &= \|x' - x''\| \leqslant \|x' - w\| \\ &= \|x' - x'' - v\| = \|\hat{x} - v\|,\ \forall v \in N(T), \end{aligned}$$

于是 $\theta \in \mathcal{P}_{N(T)}(\hat{x})$. 由定理 1.2.9 中 (2), 有 $F_X(\hat{x}) \cap N(T)^{\perp} \neq \varnothing$. 选 $\hat{x}^* \in F_X(\hat{x}) \cap N(T)^{\perp}$, 有

$$\langle \hat{x}^*, \hat{x} \rangle = \|\hat{x}^*\|^2 = \|\hat{x}\|^2.$$

对任意 $x \in T^{-1}\pi_{R(T)}(y)$, 有 $T(x) = T(\hat{x}) = \pi_{R(T)}(y)$, 于是 $x - \hat{x} \in N(T)$. 设 $x_0 = x - \hat{x}$, 则 $x = x_0 + \hat{x}$, $x_0 \in N(T)$. 于是

$$\begin{aligned} \|\hat{x}\|^2 = \langle \hat{x}^*, \hat{x} \rangle &= \langle \hat{x}^*, \hat{x} + x_0 \rangle \\ &= \langle \hat{x}^*, x \rangle \leqslant \|\hat{x}^*\|\,\|x\| = \|\hat{x}\|\,\|x\|. \end{aligned}$$

由此导出：$\forall x \in T^{-1}\pi_{R(T)}(y)$, $\|\hat{x}\| \leqslant \|x\|$, 即 $\hat{x} \in P(T^{-1}\pi_{R(T)}(y) : \theta)$. 因此，有

$$(I_{D(T)} - \mathcal{P}_{N(T)})T^{-1}\pi_{R(T)}(y) \subset \mathcal{P}(T^{-1}\pi_{R(T)}(y) : \theta). \tag{4.1.8}$$

综合 (4.1.7) 与 (4.1.8) 得 (4.1.5). □

定理 4.1.3 设 X, Y 为 Banach 空间, $T \in L(X,Y)$ 为线性算子, $N(T)$ 在 X 中的追近的. 如果 $R(T) \subset D(T^\partial)$ 且 $R(T)$ 为 Chebyshev 子空间. 集值映射 $T^\partial : D(T^\partial) \to D(T)$ 为 T 的集值度量广义逆当且仅当 T^∂ 满足下述条件:

(i) $T^\partial T T^\partial = T^\partial$, 在 $D(T^\partial)$ 上;

(ii) $T^\partial T = I_{D(T)} - \mathcal{P}_{N(T)}$, 在 $D(T)$ 上;

(iii) $TT^\partial = \pi_{R(T)}$, 在 $D(T^\partial)$ 上.

证明 必要性. 设 $T^\partial : D(T^\partial) \to D(T)$ 为集值度量广义逆, 易知: $\forall y \in D(T^\partial)$,

$$T^\partial(y) = \mathcal{P}(T^{-1}\pi_{R(T)}(y) : \theta).$$

对任意 $y \in D(T^\partial)$, 有

$$TT^\partial(y) = T(\mathcal{P}(T^{-1}\pi_{R(T)}(y) : \theta)) = \pi_{R(T)}(y),$$

即在 $D(T^\partial)$ 上

$$TT^\partial = \pi_{R(T)}.$$

且由 $\pi_{R(T)}$ 的幂等性, 有

$$\begin{aligned} T^\partial T T^\partial(y) &= T^\partial \pi_{R(T)}(y) \\ &= \mathcal{P}(T^{-1}\pi_{R(T)}\pi_{R(T)}(y) : \theta) \\ &= \mathcal{P}(T^{-1}\pi_{R(T)}(y) : \theta) \\ &= T^\partial(y). \end{aligned}$$

在 $D(T^\partial)$ 上, 又有

$$T^\partial T T^\partial = T^\partial.$$

对任意 $x \in D(T)$, 有

$$\begin{aligned} T^\partial T(x) &= \mathcal{P}(T^{-1}\pi_{R(T)}(T(x)) : \theta) \\ &= \mathcal{P}(T^{-1}T(x) : \theta) \\ &= \mathcal{P}(x + N(T) : \theta). \end{aligned}$$

下面证

$$\mathcal{P}(x + N(T) : \theta) = (I_{D(T)} - \mathcal{P}_{N(T)})(x). \tag{4.1.9}$$

事实上, 对任意 $\hat{x} \in \mathcal{P}(x+N(T) : \theta)$, 有 $x' \in N(T)$ 使 $\hat{x} = x + x'$ 且 $\|\hat{x}\| = \|x+x'\| = \inf\{\|x+y\| : y \in N(T)\}$, 于是 $\hat{x} = x - (-x')$, $-x' \in N(T)$ 且 $\|x - (-x')\| = \inf\{\|x - z\| : z \in N(T)\}$. 因此 $\hat{x} = x - (-x') \in x - \mathcal{P}_{N(T)}(x) = (I_{D(T)} - \mathcal{P}_{N(T)})(x)$, 于是

$$P(x + N(T) : \theta) \subset (I_{D(T)} - \mathcal{P}_{N(T)})(x).$$

反之, 对任意 $\hat{x} \in (I_{D(T)} - \mathcal{P}_{N(T)})(x)$, 有 $x' \in \mathcal{P}_{N(T)}(x)$ 满足 $\hat{x} = x - x'$ 且

$$\|x - x'\| = \inf\{\|x - z\| : z \in N(T)\}.$$

因此 $\hat{x} = x + (-x') \in x + N(T)$ 且

$$\|\hat{x}\| = \|x + (-x')\| = \inf\{\|x + (-z)\| : -z \in N(T)\},$$

即 $\hat{x} \in x + N(T)$, $\|\hat{x}\| = \inf\{\|y\| : y \in x + N(T)\}$. 因此，有

$$\hat{x} \in \mathcal{P}(x + N(T) : \theta).$$

于是 $(I_{D(T)} - \mathcal{P}_{N(T)})(x) \subset \mathcal{P}(x + N(T) : \theta)$, 因此，(4.1.9) 为真．于是，在 $D(T)$ 上，有

$$T^{\partial}T = I_{D(T)} - \mathcal{P}_{N(T)}.$$

充分性．设 $T^{\partial} : D(T^{\partial}) \to D(T)$ 为满足 (i)~(iii) 的集值映射．需证

$$T^{\partial}(y) = \mathcal{P}(T^{-1}\pi_{R(T)}(y) : \theta), \forall y \in D(T^{\partial}).$$

任取 $x \in T^{\partial}(y)$, 记 $x = T^{\sigma_1}(y) \in T^{\partial}(y)$. 由条件 (i), (ii), 有

$$x = T^{\sigma_1}(y) \in T^{\partial}(y) = T^{\partial}TT^{\partial}(y), y \in D(T^{\partial}).$$

我们可选 $x = T^{\sigma_2}TT^{\sigma_1}(y) = T^{\sigma_2}T(x) \in T^{\partial}TT^{\partial}(y)$. 注意 $T^{\sigma_2}T(x) \in T^{\partial}T(x) = x - \mathcal{P}_{N(T)}(x)$. 因此 $\theta \in \mathcal{P}_{N(T)}(x)$. 由定理 1.2.9, $F_X(x) \cap N(T)^{\perp} \neq \varnothing$. 取 $x^* \in F_X(x) \cap N(T)^{\perp}$. 对任意 $z \in T^{-1}\pi_{R(T)}(y)$, 有

$$T(z) = \pi_{R(T)}(y) = T(x),$$

从而 $x - z \in N(T)$. 由 F_X 与 $N(T)^{\perp}$ 的定义，有

$$\|x\|^2 = \langle x^*, x\rangle = \langle x^*, z\rangle \leqslant \|x^*\|\,\|z\|.$$

注意到 $\|x\| = \|x^*\|$, 得到 $\|x\| \leqslant \|z\|$, 对一切 $z \in T^{-1}\pi_{R(T)}(y)$. 因此 $x \in \mathcal{P}(T^{-1}\pi_{R(T)}(y) : \theta)$. 于是：$\forall y \in D(T^{\partial})$, 有

$$T^{\partial}(y) \subset \mathcal{P}(T^{-1}\pi_{R(T)}(y) : \theta). \tag{4.1.10}$$

反之，任取 $x \in \mathcal{P}(T^{-1}\pi_{R(T)}(y) : \theta)$, 对任意 $z \in N(T)$, $x - z \in T^{-1}\pi_{R(T)}(y)$, 于是

$$\begin{aligned}\|x - \theta\| &= \inf\{\|\hat{x} - \theta\| : \hat{x} \in T^{-1}\pi_{R(T)}(y)\}\\ &= \inf\{\|\hat{x} - \theta\| : \hat{x} \in x + N(T)\}\\ &= \inf\{\|x - z\| : z \in N(T)\}.\end{aligned}$$

因此，有

$$\theta \in \mathcal{P}_{N(T)}(x).$$

由条件 (iii), (ii), (i), 我们得到对一切 $y \in D(T^\partial)$,

$$x - \theta \in x - \mathcal{P}_{N(T)}(x) = T^\partial T(x) = T^\partial \pi_{R(T)}(y)$$
$$= T^\partial T T^\partial(y) = T^\partial(y).$$

于是，有

$$\mathcal{P}(T^{-1}\pi_{R(T)}(y) : \theta) \subset T^\partial(y), \ y \in D(T^\partial), \tag{4.1.11}$$

综合 (4.1.10) 与 (4.1.11), 有

$$T^\partial(y) = \mathcal{P}(T^{-1}\pi_{R(T)}(y) : \theta), \ y \in D(T^\partial).$$ □

2. 集值度量广义逆的齐性选择

定理 4.1.4 设 X, Y 为自反的 Banach 空间， Y 为严格凸的且具有 H 性质， $T \in L(X,Y)$ 为具有闭值域的稠定闭线性算子或定义在 X 上的有界线性算子. 则 X 可以赋等价严格凸的范数 $\|\cdot\|_1$, 使得： $\forall y \in Y$, 唯一存在 $T^\sigma(y) \in T^\partial(y)$, 满足

$$\|T^\sigma(y)\|_1 = \inf\{\|x\|_1 : x \in T^\partial(y)\}.$$

$T^\sigma : Y \to D(T)$ 为集值度量广义逆 T^∂ 的有界齐次选择.

证明 因为 X 为自反的 Banach 空间， X 可以赋等价的严格凸的范数 $\|\cdot\|_1$, 使 $(X, \|\cdot\|_1)$ 为自反严格凸 Banach 空间 (见 [Yu1]). 对任意 $y \in Y$, $T^\partial(y)$ 为 X 中闭凸集，同时为 $(X, \|\cdot\|_1)$ 中闭凸集，于是 $T^\partial(y)$ 为 $(X, \|\cdot\|_1)$ 中的 Chebyshev 集，从而存在唯一元 $T^\sigma(y) \in T^\partial(y)$, 满足

$$\|T^\sigma(y)\|_1 = \inf\{\|x\|_1 : x \in T^\partial(y)\}.$$

显然， $T^\sigma : Y \to D(T)$ 为 T^∂ 的选择. 下证： T^σ 为有界齐性算子. 证明分为两步.

第一步. 证 T^σ 为齐性算子.

由 T^σ 的定义，知 $\forall y \in Y$, 有

$$T^\sigma(y) = \pi_1(T^\partial(y) : \theta) \text{ 且} T^\partial(y) = \mathcal{P}(T^{-1}\pi_{R(T)}(y) : \theta),$$

其中 $\pi_1(T^\partial(y) : \theta)$ 为零元 θ 在空间 $(X, \|\cdot\|_1)$ 中闭凸集 $T^\partial(y)$ 上的唯一最佳逼近元.

由推论 1.2.12, $\forall y \in Y$, $\lambda \in R$, $\pi_{R(T)}(\lambda y) = \lambda \pi_{R(T)}(y)$. 下证

$$T^\partial(\lambda y) = \lambda T^\partial(y).$$

对任意 $y \in Y$ 及 $\lambda \in R\backslash\{0\}$, 任取 $x \in T^\partial(\lambda y)$, 由定理 4.1.1, 我们有 $x \in T^{-1}\pi_{R(T)}(\lambda y)$ 且

$$\|x\| = \min\{\|v\| : v \in T^{-1}\pi_{R(T)}(\lambda y)\},$$

于是

$$T\left(\frac{1}{\lambda}x\right)=\frac{1}{\lambda}T(x)=\frac{1}{\lambda}\pi_R(\lambda y)=\pi_{R(T)}(y)$$

且

$$\begin{aligned}\|x\|&=\min\{\|v\|:T(v)=\pi_{R(T)}(\lambda y)=\lambda\pi_{R(T)}(y)\}\\&=|\lambda|\min\left\{\left\|\frac{1}{\lambda}v\right\|:T\left(\frac{1}{\lambda}v\right)=\pi_{R(T)}(y)\right\}\\&=|\lambda|\min\left\{\left\|\frac{1}{\lambda}v\right\|:\frac{1}{\lambda}v\in T^{-1}\pi_{R(T)}(y)\right\}\\&=|\lambda|\min\{\|v\|:T(v)=\pi_{R(T)}(y)\},\end{aligned}$$

即

$$\left\|\frac{1}{\lambda}x\right\|=\min\{\|v\|:v\in T^{-1}\pi_{R(T)}(y)\},$$

因此，$x\in\lambda T^\partial(y)$, 于是

$$T^\partial(\lambda y)\subset\lambda T^\partial(y).\tag{4.1.12}$$

反之，任取 $x\in\lambda T^\partial(y)$, 有 $\frac{1}{\lambda}x\in T^\partial(y)$. 再由定理 4.1.1, $\frac{1}{\lambda}x\in T^{-1}\pi_{R(T)}(y)$ 且 $\left\|\frac{1}{\lambda}x\right\|=\min\{\|v\|:v\in T^{-1}\pi_{R(T)}(y)\}$, 于是

$$T(x)=\lambda T\left(\frac{1}{\lambda}x\right)=\lambda\pi_{R(T)}(y)=\pi_{R(T)}(\lambda y)$$

且

$$\begin{aligned}\|x\|&=|\lambda|\min\{\|v\|:v\in T^{-1}\pi_{R(T)}(y)\}\\&=\min\{\|\lambda v\|:T(\lambda v)=\pi_{R(T)}(\lambda y)\}\\&=\min\{\|v\|:T(v)=\pi_{R(T)}(\lambda y)\}.\end{aligned}$$

换言之

$$x\in T^{-1}\pi_{R(T)}(\lambda y)\text{ 且}\|x\|=\min\{\|v\|:v\in T^{-1}\pi_{R(T)}(\lambda y)\},$$

因此 $x\in T^\partial(\lambda y)$, 于是

$$\lambda T^\partial(y)\subset T^\partial(\lambda y).\tag{4.1.13}$$

结合 (4.1.12) 与 (4.1.13), 有

$$T^\partial(\lambda y)=\lambda T^\partial(y)\tag{4.1.14}$$

对一切 $y\in Y$, $\lambda\in R\backslash\{0\}$ 成立.

由 (4.1.14), $\forall y\in Y$, $\lambda\in R\backslash\{0\}$, 有

$$\begin{aligned}\|T^\sigma(\lambda y)\|_1&=\min\{\|x\|_1:x\in T^\partial(\lambda y)=\lambda T^\partial(y)\}\\&=|\lambda|\min\left\{\left\|\frac{1}{\lambda}x\right\|_1:\frac{1}{\lambda}x\in T^\partial(y)\right\}\\&=|\lambda|\min\{\|v\|_1:v\in T^\partial(y)\}\end{aligned}$$

$$= |\lambda| \|T^\sigma(y)\|_1$$
$$= \|\lambda T^\sigma(y)\|_1.$$

因为 $(X, \|\cdot\|_1)$ 为自反严格凸 Banach 空间，闭凸集 $T^\partial(\lambda y)$ 为其中 Chebyshev 集，从而零元 θ 在 $T^\partial(\lambda y)$ 上有唯一最佳逼近元，于是 $\forall y \in Y$, $\lambda \in R\backslash\{0\}$, 有 $T^\sigma(\lambda y) = \lambda T^\sigma(y)$. 当 $\lambda = 0$ 时， $T^\sigma(\lambda y) = T^\sigma(\theta) = \theta = \lambda T^\sigma(y)$. 因此， T^σ 为从 Y 到 $D(T)$ 的齐性算子.

第二步. 证 T^σ 为有界的.

因为 T^σ 为齐性的，由引理 1.3.1, 为证 T^σ 的有界性只需证明 T^σ 在 θ 处连续.

在 $D(T)$ 上引进图像范数：

$$\|x\|_{D(T)} = \|x\| + \|T(x)\|, x \in D(T).$$

由 T 的闭性，知 $\widehat{D(T)} = (D(T), \|\cdot\|_{D(T)})$ 为 Banach 空间. 因为 $R(T)$ 为 Y 的闭子空间，从而 $R(T)$ 在 Y 的诱导拓扑下为 Banach 空间. 再由 T 的闭性，知 $T : \widehat{D(T)} \to R(T)$ 为连续线性的满射，应用开映射定理 (见 [AF]), 存在 $L \geqslant 1$, 使得对任意 $z \in R(T)$, $x \in T^{-1}(y)$ 存在 $w \in T^{-1}(z)$ 满足

$$\|x - w\|_{D(T)} \leqslant L\|y - z\|. \tag{4.1.15}$$

于是由 [AF] 中定理 2.2.1, 真凸函数 $p(\cdot)$ 定义为

$$p(y) = \inf\{\|x\|_{D(T)} : x \in T^{-1}(y)\}, y \in R(T).$$

$p(\cdot)$ 在 $R(T)$ 上下半连续.

对任意 $y \in R(T)$, 任取 $x \in \mathcal{P}(T^{-1}(y) : \theta)$, 有 $\|x\| \leqslant \|v\|$ 对一切 $v \in T^{-1}(y)$ 成立. 于是 $y = T(v) = T(x)$, 且 $\forall v \in T^{-1}(y)$, 有

$$\begin{aligned}\|x\|_{D(T)} &= \|x\| + \|T(x)\| = \|x\| + \|y\| \\ &\leqslant \|v\| + \|T(v)\| = \|v\|_{D(T)},\end{aligned}$$

因此， $\forall x \in P(T^{-1}(y) : \theta)$, 有

$$p(y) = \|x\|_{D(T)}, y \in R(T). \tag{4.1.16}$$

在不等式 (4.1.15) 中，取 $x \in \mathcal{P}(T^{-1}(y) : \theta)$ 与 $z = \theta$, 则存在 $w \in T^{-1}(\theta) = N(T)$, 满足： $\forall y \in T(T)$, 有

$$p(y) = \|x\|_{D(T)} \leqslant \|w\|_{D(T)} + L(y) < \infty,$$

即 $R(T)$ 为凸函数 $p(\cdot)$ 的有效域. 从而再由 $p(\cdot)$ 的下半连续性，知 $p(\cdot)$ 在 $R(T)$ 上处处连续 (见 [Shi]).

如 $\{y_n\}\subset R(T)$, $y_n\to y_0$ $(n\to\infty)$. 由等式 (4.1.16), $\forall x_n\in\mathcal{P}(T^{-1}(y_n):\theta)$, $x_0\in\mathcal{P}(T^{-1}(y_0):\theta)$, 有

$$p(y_n)=\|x_n\|_{D(T)}\to p(y_0)=\|x_0\|_{D(T)},\quad n\to\infty.$$

由 $\|\cdot\|_{D(T)}$ 的定义，得到

$$\|x_n\|+\|y_n\|\to\|x_0\|+\|y_0\|,\quad n\to\infty,$$

于是 $\|x_n\|\to\|x_0\|$ $(n\to\infty)$. 取 $y_0=\theta$, 有 $x_0=\theta$, 有 $\|x_n\|\to 0$ $(n\to\infty)$, 从而 $\|x_n\|_1\to 0$ $(n\to\infty)$.

由于 Y 为具有 H 性质的自反严格凸 Banach 空间，从而 $\pi_{R(T)}:Y\to R(T)$ 为连续的 (见 [Si] p.47), 于是，对于 $\{y_n\}\subset Y$ 使得 $y_n\to\theta$ $(n\to\infty)$, 有 $\pi_{R(T)}(y_n)\to\pi_{R(T)}(\theta)=\theta$ $(n\to\infty)$.

取 $x_n=T^\sigma(y_n)\in T^\partial(y_n)=\mathcal{P}(T^{-1}\pi_{R(T)}(y_n):\theta)$ $(n=1,2,\cdots)$ 及 $\theta=T^\sigma(\theta)\in T^\partial(\theta)=\mathcal{P}(N(T):\theta)$. 于是

$$\|T^\sigma(y_n)\|=\|x_n\|\to 0,\quad n\to\infty,$$

因此 T^σ 在 θ 处连续. 由引理 1.3.1, T^σ 为有界齐性算子. □

引理 4.1.1　设 X,Y 为自反 Banach 空间， $T\in L(X,Y)$ 为线性算子. 如果 $\forall x\in D(T)$, $\pi_{\overline{N(T)}}(x)\in\mathcal{P}_{\overline{N(T)}}(x)\cap N(T)$, 记 $C(T)=F_X^{-1}(N(T)^\perp)\cap D(T)$, 则

$$T:C(T)\to R(T)$$

为一一到上算子,其中 $\pi_{\overline{N(T)}}:X\to\overline{N(T)}$ 为 $\mathcal{P}_{\overline{N(T)}}$ 的任意满足拟可加性且 $N(\pi_{N(T)})=C(T)$ 的单值选择.

证明　$\forall y\in R(T)$, $\exists x\in D(T)$, 使 $y=T(x)$. 由推论 1.2.11, 由 X 的自反性，对 x 有分解式:

$$x=\pi_{\overline{N(T)}}(x)+x_1,\ x_1\in F_X^{-1}(\overline{N(T)}^\perp)=F_X^{-1}(N(T)^\perp).$$

由条件 $\pi_{\overline{N(T)}}(x)\in\mathcal{P}_{\overline{N(T)}}(x)\cap N(T)$, 有

$$x_1\in F_X^{-1}(N(T)^\perp)\cap D(T)=C(T),\ 且 y=T(x)=T(x_1).$$

由上述， $T:C(T)\to R(T)$ 为满射，且

$$D(T)=N(T)+C(T).$$

$\forall x\in N(T)\cap[C(T)-C(T)]$, 有 $x\in N(T), x=x_1-x_2, x_1,x_2\in C(T)$, 从而由 $C(T)=N(\pi_{N(T)})$ 及 $\pi_{N(T)}$ 的拟可加性，可知 $\theta=\pi_{N(T)}(x_1)=\pi_{N(T)}(x_2)+x=x$, 因此

$$D(T)=N(T)\dot{+}C(T).\tag{4.1.17}$$

假如 $T: C(T) \to R(T)$ 不是单射，存在 $x_1, x_2 \in C(T)$, $x_1 \neq x_2$. 但 $T(x_1) = T(x_2)$, 即 $x_1 - x_2 \in N(T)$, 于是

$$x_1 = \theta + x_1 = (x_1 - x_2) + x_2.$$

这与 (4.1.17) 矛盾. 因此 T 为一一算子. □

§4.2 Tseng 度量广义逆

设 X, Y 为 Banach 空间， $T \in L(X,Y)$ 为线性算子，当 $\overline{N(T)}, \overline{R(T)}$ 分别为 X, Y 中 Chebyshev 子空间时，以 $\pi_{\overline{N(T)}}$ 与 $\pi_{\overline{R(T)}}$ 记对应的度量投影算子.

下面引入 Tseng 度量广义逆.

定义 4.2.1 设 X, Y 为 Banach 空间， $T \in L(X,Y)$ 为线性算子. 如果 $\overline{N(T)}$ 与 $\overline{R(T)}$ 分别为 X, Y 中 Chebyshev 子空间，且存在齐性算子 $T^g: D(T^g) \to R(T^g)$ 满足

(i) $R(T) \subset D(T^g)$,

(ii) $R(T^g) \subset D(T)$,

(iii) $T^gT = I_{D(T)} - \pi_{\overline{N(T)}}$,

(iv) $TT^g = \pi_{\overline{R(T)}}$,

则称 T^g 为 T 的 Tseng 度量广义逆.

引理 4.2.1 设 X 为 Banach 空间， L, M 为 X 的子空间，且 $M \subset L$, 假定 $\overline{M}$ 为 X 中 Chebyshev 集，则

$$L = M \dotplus (L \cap F_X^{-1}(M^\perp)) \tag{4.2.1}$$

当且仅当 $\forall x \in L$, $\pi_{\overline{M}}(x) \in M$, 其中 $\pi_{\overline{M}}$ 为从 X 到 $\overline{M}$ 上的度量投影算子.

证明 必要性. 因 $\overline{M}$ 为 X 中 Chebyshev 集，由推论 1.2.11, $\forall x \in L$, 有 $x_1 \in F_X^{-1}(M^\perp)$, 使

$$x = \pi_{\overline{M}}(x) + x_1. \tag{4.2.2}$$

另一方面，由条件 (4.2.1), 存在 $x_0 \in M \subset \overline{M}$, $x_2 \in L \cap F_X^{-1}(M^\perp)$ 使 x 可唯一表示为

$$x = x_0 + x_2. \tag{4.2.3}$$

由分解式的唯一性，有 $\pi_{\overline{M}}(x) = x_0 \in M$.

充分性. $\forall x \in L$, 由推论 1.2.11, x 有唯一分解式

$$x = \pi_{\overline{M}}(x) + x_1,\ x_1 \in F_X^{-1}(M^\perp).$$

由于 $\pi_{\overline{M}}(x) \in M \subset L$, 有 $x_1 \in L$, 从而 $x_1 \in L \cap F_X^{-1}(M^\perp)$, 于是 (4.2.1) 成立. □

定理 4.2.1 设 X, Y 为 Banach 空间, $T \in L(X,Y)$ 为线性算子, 且 $\overline{N(T)}$, $\overline{R(T)}$ 分别为 X, Y 中的 Chebyshev 子空间, 则 T 存在 Tseng 度量广义逆 T^g 当且仅当

$$D(T) = N(T) \dot{+} C(T), \tag{4.2.4}$$

这里 $C(T) = D(T) \cap F_X^{-1}(N(T)^{\perp})$ 为 X 中齐性集.

此时, 对任意齐性集 $L \subset F_Y^{-1}(R(T)^{\perp})$, 均存在 T 的 Tseng 度量广义逆 T_L^g, 使

$$D(T_L^g) = R(T) \dot{+} L,\ R(T_L^g) = C(T),\ N(T_L^g) = L.$$

证明 必要性. 设 $T^g : D(T^g) \to R(T^g)$ 为 T 的 Tseng 度量广义逆, 由定义 4.2.1 中的 (ii), (iii), 对任何 $x \in D(T)$, 有

$$T^g Tx \in R(T^g) \subset D(T),$$

$$\pi_{\overline{N(T)}} x = x - T^g Tx \in D(T).$$

又由定义 4.2.1 中 (i), (iv), 有

$$Tx \in R(T) \subset D(T^g),$$

$$T(\pi_{\overline{N(T)}} x) = T(x - T^g Tx) = Tx - TT^g Tx,$$

$$= Tx - \pi_{\overline{R(T)}} Tx = \theta.$$

于是, $\pi_{\overline{N(T)}} x \in N(T)$.

再由引理 4.2.1, 并注意到 $N(T) \subset D(T)$ 均为线性子空间, 从而有

$$D(T) = N(T) \dot{+} C(T).$$

由 F_X^{-1} 的齐性, $C(T) = D(T) \cap F_X^{-1}(N(T)^{\perp})$ 为齐性集.

充分性. 应用条件 (4.2.2), 由引理 4.2.1 及引理 4.1.1, 知 $T : C(T) \to R(T)$ 为一一算子. 令 $T_0 = T_{C(T)}$(这里 $T_{C(T)}$ 为 T 在 $C(T)$ 上的限制), 则 $T_0^{-1} : R(T) \to C(T)$ 存在且为齐性算子.

对任意齐性集 $L \subset F_Y^{-1}(R(T)^{\perp})$, 令

$$D(T_L^g) = R(T) \dot{+} L,\ R(T_L^g) = C(T),$$

则 $D(T^g)$, $R(T_L^g)$ 均为齐性集, 且 $R(T) \subset D(T_L^g)$, $R(T_L^g) \subset D(T)$, 满足定义 4.2.1 中 (i), (ii).

定义算子 $T_L^g : D(T_L^g) \to R(T_L^g)$ 如下: 对任何 $y \in D(T_L^g)$, 唯一存在 $y_1 \in R(T) \subset \overline{R(T)}$, $y_2 \in L \subset F_Y^{-1}(R(T)^{\perp})$ 满足 $y = y_1 + y_2$, 令 $T_L^g y = T_0^{-1} y_1 \in C(T) = R(T_L^g)$, 则 T_L^g 有确定意义.

又由推论 1.2.11, y 有分解式

$$y = \pi_{\overline{R(T)}} y + y',\ y' \in F_Y^{-1}(R(T)^{\perp}).$$

由分解的唯一性，得到

$$y_1 = \pi_{\overline{R(T)}} y \in R(T), \tag{4.2.5}$$

于是

$$T_L^g y = T_0^{-1} \pi_{\overline{R(T)}} y.$$

由 $T_0^{-1} : R(T) \to C(T)$ 及 $\pi_{\overline{R(T)}} : D(T_L^g) \to R(T)$ 的齐性，知 T_L^g 为齐性算子.

对于 $y \in D(T_L^g)$, 由 (4.2.5) 式，有

$$TT_L^g y = TT_0^{-1} \pi_{\overline{R(T)}} y = \pi_{\overline{R(T)}} y,$$

即

$$TT_L^g = \pi_{\overline{R(T)}},$$

满足定义 4.2.1 中 (iv).

对 $x \in D(T)$, 由 (4.2.2) 式， x 有唯一分解

$$x = x_1 + x_2, x \in N(T), x_2 \in C(T) \subset F_X^{-1}(N(T)^{\perp}).$$

由推论 1.2.11, x 又有唯一分解

$$x = \pi_{\overline{N(T)}} x + x', x' \in F_X^{-1}(N(T)^{\perp}).$$

由分解式的唯一性,

$$x_1 = \pi_{\overline{N(T)}} x, x_2 = x',$$

于是

$$x = \pi_{\overline{N(T)}} x + x_2, x_2 \in C(T).$$

因为 $\pi_{\overline{N(T)}} x = x_1 \in N(T)$, 所以

$$\begin{aligned} T_L^g T x &= T_L^g T(\pi_{\overline{N(T)}} x + x_2) = T_L^g T x_2 = x_2 \\ &= x - \pi_{N(T)} x = (I_{D(T)} - \pi_{N(T)}) x, \end{aligned}$$

即

$$T_L^g T = I_{D(T)} - \pi_{N(T)}.$$

满足定义 4.2.1 中的 (iii). 从而 T_L^g 为 T 的 Tseng 度量广义逆.

由 T_L^g 的定义， $N(T_L^g) = L$ 是明显的. □

注记 1 在定理 4.2.1 的条件下，若取 $L_M = F_X^{-1}(R(T)^{\perp})$, 则 $T_{L_M}^g$ 称为 T 的最大 Tseng 度量广义逆，记为 T^M.

注记 2 在定义 4.2.1 中，如果 X, Y 为 Hilbert 空间，则度量投影算子 $\pi_{\overline{N(T)}}$, $\pi_{\overline{R(T)}}$ 成为正交投影算子 $P_{\overline{N(T)}}, P_{\overline{R(T)}}$, 此时，易知 $I_{D(T)} - P_{\overline{N(T)}} = P_{\overline{R(T^g)}}$, 于是 (iii) 变为 (iii)′: $T^g T = \mathcal{P}_{\overline{R(T^g)}}$. 此时 Tseng 度量广义逆 T^g 恰为 Tseng 广义逆 (见 [BG]).

推论 4.2.2　若 X, Y 为自反严格凸 Banach 空间，$T \in L(X,Y)$ 为稠定的闭线性算子，或为定义在 X 上的有界线性算子，则 T^M 存在.

证明　因 $\overline{N(T)} = N(T)$, $\overline{R(T)}$ 分别为 X, Y 中的 Chebyshev 子空间，且 $\forall x \in D(T)$, $\pi_{\overline{N(T)}}(x) = \pi_{N(T)}(x) \in N(T)$. 由引理 4.2.1, 有

$$D(T) = N(T)\dot{+}C(T),\ C(T) = D(T) \cap F_X^{-1}(N(T)^{\perp}).$$

再由定理 4.2.1, 对 $L_M = F_X^{-1}(R(T)^{\perp})$, $T^M = T^g_{L_M}$ 存在. □

定理 4.2.3　设 X, Y 为 Banach 空间，$T \in L(X,Y)$ 为线性算子，$\overline{N(T)}, \overline{R(T)}$ 为 X, Y 中 Chebyshev 子空间. 如果 T 的最大 Tseng 度量广义逆 T^M 存在，则 T^M 满足

(i) $TT^MT = T$, 在 $D(T)$ 上;

(ii) $T^MTT^M = T^M$, 在 $D(T^M)$ 上;

(iii) $T^MT = I_{D(T)} - \pi_{\overline{N(T)}}$, 在 $D(T)$ 上;

(iv) $TT^M = \pi_{\overline{R(M)}}$, 在 $D(T^M)$ 上,

其中 $D(T^M) = R(T)\dot{+}F_Y^{-1}(R(T)^{\perp})$.

证明　由定义 4.2.1, 只需证 (i), (ii). $\forall x \in D(T)$, $T(x) \in R(T) \subset D(T^M)$, 由定义 4.2.1 中 (iv), 有

$$TT^MT(x) = \pi_{\overline{R(T)}}T(x) = T(x),$$

故 (i) 为真.

$\forall y \in D(T^M)$, $T^M(y) \in R(T^M) = C(T) \subset D(T)$, 由定义 4.2.1 中 (iii), 有

$$T^MTT^M(y) = T^M(y) - \pi_{\overline{N(T)}}(T^M(y)). \tag{4.2.6}$$

因 T^M 存在，由定理 4.2.1, 有

$$D(T) = N(T)\dot{+}C(T),$$

这里 $C(T) = D(T) \cap F_X^{-1}(N(T)^{\perp})$. $T^M(y)$ 有分解式:

$$T^M(y) = \theta + T^M(y),\ \theta \in N(T),\ T^M(y) \in C(T).$$

由推论 1.2.11, 又有

$$T^M(y) = \pi_{\overline{N(T)}}(T^M(y)) + x',\ x' \in C(T).$$

由分解式的唯一性，有

$$\pi_{\overline{N(T)}}(T^M(y)) = \theta.$$

再由 (4.2.6) 式，得: $\forall y \in D(T^M)$, 有

$$T^MTT^M(y) = T^M(y).$$

此为 (ii). □

注记 3 由定理 4.2.2, 最大的 Tseng 度量广义逆 T^M 又称为 Moore-Penros 度量广义逆.

注记 4 如果 X, Y 为 Hilbert 空间, $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ 为定义在 X 上的有界性算子, 则 T 的最大 Tseng 广义逆, 记为 T^+, 满足:

(i) $TT^+T = T$,

(ii) $T^+TT^+ = T^+$,

(iii) $(T^+T)^* = T^+T$,

(iv) $(TT^+)^* = TT^+$

(见 [Na1]). T^+ 为 T 的 Moore-Penrose 广义逆.

§4.3 Moore-Penrose 度量广义逆

由 §4.2 中注记 3, 可以给出以下定义.

定义 4.3.1 设 X,Y 为 Banach 空间, $T \in L(X,Y)$ 为线性算子, $\overline{N(T)}$, $\overline{R(T)}$ 分别为 Chebyshev 子空间, 如果齐次算子 $T^M : D(T^M) \to D(T)$, 满足

(i) $TT^MT = T$, 在 $D(T)$ 上;

(ii) $T^MTT^M = T^M$, 在 $D(T^M)$ 上;

(iii) $T^MT = I_{D(T)} - \pi_{\overline{N(T)}}$, 在 $D(T)$ 上;

(iv) $TT^M = \pi_{\overline{R(T)}}$, 在 $D(T^M)$ 上,

则称 T^M 为 T 的 Moore-Penrose 度量广义逆, 其中 $D(T^M) = R(T)\dot{+}F_Y^{-1}(R(T)^\perp)$.

定理 4.3.1 设 X,Y 为 Banach 空间, $T \in L(X,Y)$ 为线性算子, $\overline{N(T)}$, $\overline{R(T)}$ 分别为 X,Y 中的 Chebyshev 子空间, 如果 T 的 Moore-Penrose 度量广义逆 T^M 存在, 则 T^M 是唯一的, 且

$$T^M(y) = (T|_{C(T)})^{-1}\pi_{\overline{R(T)}}(y),\ y \in D(T^M),$$

其中 $D(T^M) = R(T)\dot{+}F_X^{-1}(R(T)^\perp)$, $C(T) = D(T) \cap F_X^{-1}(N(T)^\perp)$.

证明 因为 T 的 Moore-Penrose 度量广义逆 T^M 存在, 由定理 4.2.1, 有 $D(T) = N(T)\dot{+}C(T)$, 其中 $C(T) = D(T) \cap F_X^{-1}(N(T)^\perp)$. 取 $D^M := R(T)\dot{+}F_X^{-1}(R(T)^\perp)$. $\forall y \in D^M$, 因 $\overline{R(T)}$ 为 Y 中的 Chebyshev 子空间, 由推论 1.2.11, $y = \pi_{\overline{R(T)}}(y) + y_2$, 其中 $y_2 \in F_Y^{-1}(R(T)^\perp)$. 由 D^M 的定义, $\pi_{\overline{R(T)}}(y) \in R(T)$.

$\forall x \in D(T) = N(T)\dot{+}C(T)$, 与上同理, 有 $\pi_{\overline{N(T)}}(x) \in N(T)$. 应用引理 4.1.1, $T : C(T) \to R(T)$ 为一一到上的映射.

记 $T|_{C(T)}$ 为 T 在 $C(T)$ 上的限制, 定义

$$T^\# = (T|_{C(T)})^{-1}\pi_{\overline{R(T)}}(y),\ y \in D^M.$$

则 $T^\#$ 为从 D^M 到 $C(T)$ 上的齐性算子. $\forall y \in D^M$, 有 $TT^\#(y) = \pi_{\overline{R(T)}}(y)$, 且

$$T^{\#}TT^{\#}(y)=T^{\#}\pi_{\overline{R(T)}}(y)=(T|_{C(T)})^{-1}\pi^2_{\overline{R(T)}}(y)$$
$$=(T|_{C(T)})^{-1}\pi_{\overline{R(T)}}(y)=T^{\#}(y);$$
$$\forall x\in D(T),\ TT^{\#}T(x)=\pi_{\overline{R(T)}}(T(x))=T(x)$$

且

$$T^{\#}T(x)=(T|_{C(T)})^{-1}\pi_{\overline{R(T)}}(T(x))=(T|_{C(T)})^{-1}T(x)=x-\pi_{\overline{N(T)}}(x).$$

事实上， $\forall x\in D(T)$, $x=\pi_{\overline{N(T)}}(x)+x_2$, $x_2\in C(T)$, $\pi_{\overline{N(T)}}(x)\in N(T)$, 从而

$$(T|_{C(T)})^{-1}T(x)=(T|_{C(T)})^{-1}T(\pi_{\overline{N(T)}}(x)+x_2)$$
$$=(T|_{C(T)})^{-1}T|_{C(T)}(x_2)$$
$$=x_2=x-\pi_{\overline{N(T)}}(x).$$

由定义， $T^{\#}$ 为 T 的 Moore-Penrose 度量广义逆.

设 T^M 为 T 的任一个 Moore-Penrose 度量广义逆，下证： $T^M=T^{\#}$.

事实上，由 T^M 的定义中 (iv), 对任意 $y\in D^M$, 有

$$TT^M(y)=\pi_{\overline{R(T)}}(y).$$

因为 $T^M(y)\in D(T)$, 由 T^M 定义中 (iii), 有

$$T^MTT^M(y)=T^M(y)-\pi_{\overline{N(T)}}(T^M(y)).$$

由 T^M 定义中 (ii), 得

$$\pi_{\overline{N(T)}}(T^M(y))=\theta. \tag{4.3.1}$$

另一方面, 由于 $\overline{N(T)}$ 为 Chebyshev 子空间, 应用推论 1.2.11, 对 $T^M(y)\in D(T)$, 有

$$T^M(y)=\pi_{\overline{N(T)}}(T^M(y))+x_2,\ x_2\in F_X^{-1}(\overline{N(T)}^{\perp}).$$

由 (4.3.1), 得 $T^M(y)=x_2\in C(T)$. 注意到 $T:C(T)\to R(T)$ 为一一到上映射, 且 $\forall y\in D^M$, $\pi_{\overline{R(T)}}(y)\in R(T)$. 由 (4.3.1), 有

$$T^M(y)=(T|_{C(T)})^{-1}\pi_{\overline{R(T)}}(y)=T^{\#}(y),\ y\in D^M.$$

记 $D(T^M)=D^M$, 定理得证. □

定理 4.3.2 设 X,Y 严格凸 Banach 空间, $T\in L(X,Y)$ 为线性算子, $\overline{N(T)}$, $\overline{R(T)}$ 分别为 X,Y 中的逼近子空间，又设 $D^M=R(T)\dot{+}F_Y^{-1}(R(T)^{\perp})$. 如果 $D(T)=N(T)\dot{+}C(T)$, 其中 $C(T)=D(T)\cap F_X^{-1}(N(T)^{\perp})$, $T^M:D^M\to D(T)$ 为齐性算子，则下述命题等价

(1) T^M 为 T 的 Moore-Penrose 度量广义逆;

(2) 对任意 $y\in D^M$, $x_0=T^M(y)$ 为 $T(x)=y$ 的最佳逼近解;

(3) 对任意 $y \in D^M$, $x_0 = T^M(y)$ 为度量投影方程

$$T(x) = \pi_{\overline{R(T)}}(y)$$

的最小范数解, 即 $\forall y \in D^M$, 有

$$T^M(y) = \pi(T^{-1}\pi_{\overline{R(T)}}(y) : \theta).$$

证明 (1)⇒(2). 设 $T^M : D^M \to D(T)$ 为 T 的度量广义逆. 对任意 $y \in D^M$, 取 $x_0 = T^M(y) \in D(T)$. 由 T^M 的定义中 (iv),

$$T(x_0) = TT^M(y) = \pi_{\overline{R(T)}}(y),$$

于是 $\pi_{\overline{R(T)}}(y) \in R(T)$.

对任意 $x \in D(T)$, 因为 $T(x) \in R(T)$, 有

$$\|y - T(x_0)\| = \|y - \pi_{\overline{R(T)}}(y)\| \leqslant \|y - T(x)\|,$$

即 x_0 为 $T(x) = y$ 的极值解.

对任意 $x \in D(T)$ 满足 $T(x) = \pi_{\overline{R(T)}}(y)$, 有

$$x_0 - x \in N(T), \tag{4.3.2}$$

于是由 T^M 定义中 (ii) 与 (iii), 得到

$$x_0 = T^M(y) = T^M TT^M(y) = T^M T(x_0) = x_0 - \pi_{\overline{N(T)}}(x_0),$$

因此 $\pi_{\overline{N(T)}}(x_0) = \theta$. 因为 $\overline{N(T)}$ 为 X 中 Chebyshev 子空间, 由推论 1.2.11, x_0 有唯一分解

$$x_0 = \pi_{\overline{N(T)}}(x_0) + x_2 = x_2 \in F_X^{-1}(N(T)^{\perp}),$$

于是

$$F_X(x_0) \cap N(T)^{\perp} \neq \varnothing.$$

取 $x_0^* \in F_X(x_0) \cap N(T)^{\perp}$, 由 (4.3.2), $\langle x_0^*, x_0 - x\rangle = 0$ 且 $\forall x \in D(T)$, $T(x) = \pi_{\overline{R(T)}}(y)$. 于是, 由 F_X 的定义, 有

$$\|x_0\|^2 = \langle x_0^*, x_0\rangle = \langle x_0^*, x\rangle \leqslant \|x_0^*\|\|x\|.$$

注意到 $\|x_0\| = \|x_0^*\|$, 得到 $\|x_0\| \leqslant \|x\|$, 且 $T(x) = \pi_{\overline{R(T)}}(y)$, 因此 $x_0 = T^M(y)$ 为 $T(x) = y$ 的最佳逼近解.

(2)⇒(3). 显然.

(3)⇒(1). 设 $\forall y \in D^M$, $x_0 = T^M(y)$ 为算子方程 $T(x) = \pi_{\overline{R(T)}}(y)$ 的最小范数解, 由度量投影的定义及 X 的严格凸性, 有

$$T^M(y) = \pi(T^{-1}\pi_{\overline{R(T)}}(y) : \theta), \tag{4.3.3}$$

其中 $T^{-1}\pi_{\overline{R(T)}}(y)=\{x\in D(T):\ T(x)=\pi_{\overline{R(T)}}(y)\}$.

下面证 T^M 满足定义 4.3.1 中 (i)~(iv).

对任意 $y\in D^M$, 由 (4.3.3), 有 $T^M(y)\in T^{-1}\pi_{\overline{R(T)}}(y)$, 于是

$$TT^M(y)=\pi_{\overline{R(T)}}(y). \tag{4.3.4}$$

由此, $\forall x\in D(T)$, 有

$$TT^MT(x)=\pi_{\overline{R(T)}}(T(x))=T(x),$$

且 $\forall y\in D^M$, 有

$$\begin{aligned}T^MTT^M&=\pi(T^{-1}\pi^2_{\overline{R(T)}}(y):\theta)\\&=\pi(T^{-1}\pi_{\overline{R(T)}}(y):\theta)\\&=T^M(y).\end{aligned}$$

定义 4.3.1 中 (i), (ii) 为真.

因为 $D(T)=N(T)\dot{+}C(T)$, 其中 $C(T)=D(T)\cap F_X^{-1}(N(T)^\perp)$. 由定理 4.3.1, T 有唯一的 Moore-Penrose 度量广义逆, 从而 $\overline{N(T)}$ 与 $\overline{R(T)}$ 为 Chebyshev 子空间. $\forall x\in D(T)$, x 有唯一分解

$$x=\pi_{\overline{N(T)}}(x)+x_2, \tag{4.3.5}$$

其中 $\pi_{\overline{N(T)}}(x)\in N(T)$, $x_2\in C(T)$. 于是 $T(x)=T(x_2)$, 即 $x_2=T^{-1}T(x)=\{z\in D(T):\ T(z)=T(x)\}$.

对任意 $x_1\in T^{-1}T(x)$, 有 $x_1-x_2\in N(T)$. 取 $x_0=x_1-x_2$, 则 $x_1=x_0+x_2$ 且 $x_0\in N(T)$. 因为 $x_2\in C(T)\subset F_X^{-1}(N(T)^\perp)$, 即

$$F_X(x_2)\cap N(T)^\perp\neq\varnothing.$$

可选 $x_2^*\in F_X(x_2)\cap N(T)^\perp$, 由 F_X 的定义, 有

$$\begin{aligned}\langle x_2^*,\ x_1\rangle&=\langle x_2^*,\ x_0\rangle+\langle x_2^*,\ x_2\rangle\\&=\langle x_2^*,\ x_2\rangle=\|x_2^*\|^2=\|x_2\|^2,\end{aligned}$$

于是 $\|x_2\|^2\leqslant\|x_2^*\|\|x_1\|=\|x_2\|\|x_1\|$, 由此得到 $\|x_2\|\leqslant\|x_1\|$. 换言之, 有 $x_2\in\mathcal{P}(T^{-1}T(x):\theta)$. 由 X 的严格凸性及 (4.3.3) 式, 得

$$x_2=\pi_{T^{-1}T(x)}(\theta)=T^MT(x).$$

于是由 (4.3.5) 式, 得到: $\forall x\in D(T)$,

$$T^MT(x)=x_2=(I_{D(T)}-\pi_{\overline{N(T)}})(x).$$

因此, T^M 定义中 (iii) 为真. 由 (4.3.3), T^M 的齐性算子, 故 T^M 恰为 T 的 Moore-Penrose 度量广义逆. □

线性算子 T 的 Moore-Penrose 度量广义逆 T^M 一般为非线性算子. 因而其连续性不是显而易见的问题.

定理 4.3.3 设 X,Y 自反严格凸 Banach 空间，且具有 H 性质， $T\in L(X,Y)$ 为稠定线性算子. 记 $C(T)=D(T)\cap F_X^{-1}(N(T)^{\perp})$ 与 $D^M=R(T)\dot{+}F_Y^{-1}(N(T)^{\perp})$. 存在 T 的连续的 Moore-Penrose 度量广义逆 $T^M:D^M\to C(T)$, 满足 $\overline{R(T)}\subset D^M$ 且 $\overline{N(T)}\subset D(T)$, 当且仅当

(i) T 为闭算子,

(ii) $R(T)$ 为闭的.

证明 必要性. 假定存在 T 的连续的 Moore-Penrose 度量广义逆 T^M 使得 $\overline{R(T)}\subset D^M$ 且 $\overline{N(T)}\subset D(T)$.

对任意的 $y\in\overline{R(T)}\subset D^M$, 由 T^M 的定义，有

$$y=\pi_{\overline{R(T)}}(y)=TT^M(y)\in R(T),$$

因此， $R(T)=\overline{R(T)}$, 即 $R(T)$ 为闭的.

下证 T 为闭算子.

设 $\{x_n\}\subset D(T)$, $x_n\to x_0\in X$, $T(x_n)\to y_0\in Y$ $(n\to\infty)$. 取 $y_n=T(x_n)$, 则 $\{y_n\}\subset R(T)$ 且 $y_n\to y_0$ $(n\to\infty)$. 由 $R(T)$的闭性， $y_0\in R(T)\subset D^M$. 由 T^M 的连续性，得到

$$x_n':=T^M(y_n)\to T^M(y_0)=:y_0,\quad n\to\infty.$$

因为 T 的 Moore-Penrose 度量广义逆 T^M 存在，故 $\overline{N(T)}$ 为 X 的 Chebyshev 子空间，且

$$D(T)=D(T)\dot{+}C(T),\tag{4.3.6}$$

其中 $C(T)=D(T)\cap F_X^{-1}(N(T)^{\perp})$.

对于 $x_n\in D(T)$, 由推论 1.2.11, 有分解

$$x_n=\pi_{\overline{N(T)}}(x_n)+\hat{x}_n.\tag{4.3.7}$$

由引理 4.2.1 及 (4.3.6), 知 $\pi_{\overline{N(T)}}(x_n)\in N(T)$, $\hat{x}_n\in C(T)(n=1,2,\cdots)$.

由引理 4.1.1, T 在 $C(T)$ 上的限制 $T|_{C(T)}$ 为从 $C(T)$ 到 $R(T)$ 的一一到上的算子. 由 (4.3.7), 有

$$y_n=T(x_n)=T(\hat{x}_n)=T|_{C(T)}(\hat{x}_n),\quad n=1,2,\cdots.$$

另一方面，有

$$y_n=\pi_{\overline{R(T)}}(y_n)=TT^M(y_n)=T(x_n')=T|_{C(T)}(x_n'),\quad n=1,2,\cdots.$$

由 $T|_{C(T)}$ 的单射性，有 $x_n'=\hat{x}_n$ $(n=1,2,\cdots)$, 因此

$$\hat{x}_n=T^M(y_n)\to x_0'=T^M(y_0),\quad n\to\infty,\tag{4.3.8}$$

且 $x_0' \in C(T)$. 由 (4.3.7) 及 (4.3.8), 有

$$\pi_{\overline{N(T)}}(x_n) = x_n - \hat{x}_n \to x_0 - T^M(y_0), \quad n \to \infty.$$

因为 $\pi_{\overline{N(T)}}(x_n) \in N(T)$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 则

$$x_0 - T^M(y_0) \in \overline{N(T)}.$$

取 $\hat{x} = x_0 - T^M(y_0)$, 则 $x_0 = \hat{x} + T^M(y_0)$, $\hat{x} \in \overline{N(T)}$ 且 $T^M(y_0) \in C(T)$. 由条件 $\overline{N(T)} \subset D(T)$, 知 $x_0 \in D(T)$.

在 (4.3.7) 中以 x_0 代 x_n, 由分解式唯一性，得

$$x_0 = \pi_{\overline{N(T)}}(x_0) + T^M(y_0),$$

其中 $\pi_{\overline{N(T)}}(x_0) \in N(T)$, 于是

$$T(x_0) = TT^M(y_0) = \pi_{\overline{N(T)}}(y_0) = y_0.$$

因此， T 为闭算子.

充分性. 设 T 为具有闭值域的稠定的闭线性算子，则 $\overline{N(T)} = N(T) \subset D(T)$ 且 $\overline{R(T)} = R(T) \subset D^M$. 由于 X, Y 均为自反严格凸 Banach 空间，由推论 4.2.1, T 的 Moore-Penrose 度量广义逆 T^M 存在，下证 T^M 为连续的.

由定理 4.3.2, 知： $\forall y \in D^M$,

$$T^M(y) = \pi(T^{-1}\pi_{\overline{R(T)}}(y) : \theta). \tag{4.3.9}$$

为证 T^M 的连续性，仅需证：

(i) 对于 $\{y_n\} \subset D^M$, $y_0 \in D^M$, $y_n \to y_0$, 有

$$\pi_{\overline{R(T)}}(y_n) \to \pi_{\overline{R(T)}}(y_0), \quad n \to \infty.$$

(ii) 对任意 $y_n \in R(T)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 满足 $y_n \to y_0$ $(n \to \infty)$, 有

$$\pi(T^{-1}(y_n) : \theta) \to \pi(T^{-1}(y_0) : \theta), \quad n \to \infty.$$

因为空间 Y 为自反严格凸的，具有 H 性质，由 [Si]p.47, 推论 47, 知 (i) 为真.

下证 (ii). 在 $D(T)$ 上引入图像范数

$$\|x\|_{D(T)} = \|x\| + \|T(x)\|, \ x \in D(T),$$

则 $(D(T), \|\cdot\|_{D(T)}) =: \widehat{D(T)}$ 为 Banach 空间. 类似定理 4.1.4 中 (4.1.15) 式，在 $R(T)$ 上定义泛函： $\forall y \in R(T)$, 有

$$p(y) = \inf\{\|x\|_{D(T)} : x \in T^{-1}(y)\}.$$

用定理 4.1.4 中同样的证明，知 $p(\cdot)$ 为 $R(T)$ 上的连续泛函.

下证: $\forall y \in R(T)$, 有

$$p(y) = \|T^M(y)\|_{D(T)}. \tag{4.3.10}$$

事实上，对任意 $y \in R(T)$, $T^M(y) \in T^{-1}(y)$, 且对任意的 $x \in T^{-1}(y)$, 由定理 4.3.2 中 (3), 有 $\|T^M(y)\| \leqslant \|x\|$ 且 $T(x) = y$, 于是

$$\begin{aligned}\|T^M(y)\|_{D(T)} &= \|T^M(y)\| + \|TT^M(y)\| \\ &= \|T^M(y)\| + \|y\| \\ &\leqslant \|x\| + \|T(x)\| \\ &= \|x\|_{D(T)}.\end{aligned}$$

因此，对 $y \in R(T)$, 有

$$\|T^M(y)\|_{D(T)} = \inf\{\|x\|_{D(T)} : x \in T^{-1}(y)\} = p(y).$$

设 $\{y_n\} \subset R(T)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, $y_n \to y_0$ $(n \to \infty)$, 有

$$\|T^M(y_n)\|_{D(T)} = p(y_n) \to p(y_0) = \|T^M(y_0)\|_{D(T)}, \quad n \to \infty.$$

由 $\|\cdot\|_{D(T)}$ 的定义及 $y_n \to y_0$ $(n \to \infty)$, 得

$$\|T^M(y_n)\| \to \|T^M(y_0)\|, \quad n \to \infty. \tag{4.3.11}$$

注意到 $T^M(y_n) = \pi(T^{-1}(y_n) : \theta)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, 令 $x_n = \pi(T^{-1}(y_n) : \theta)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, 则

$$\|x_n\| \to \|x_0\|, \quad n \to \infty. \tag{4.3.12}$$

因为空间 X 具有 H 性质，为证 $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$, 仅需证

$$x_n \xrightarrow{\text{弱}} x_0, \quad n \to \infty. \tag{4.3.13}$$

假如 (4.3.13) 不真. 因为 X 为自反 Banach 空间， $\{x_n\}$ 为 X 中有界列，从而有 $\{x_n\}$ 的子列，不妨仍用原记号，使得

$$x_n \xrightarrow{\text{弱}} \hat{x}_0 \neq x_0, \quad n \to \infty. \tag{4.3.14}$$

因为 $\overline{D(T)} = X$, X 与 Y 为自反的 Banach 空间， T 的共轭算子 T^* 存在，且为稠定的闭线性算子， $\overline{D(T^*)} = Y^*$, $T = T^{**}$. 对任意的 $w^* \in D(T^*)$, 有

$$\langle w^*,\ y_n\rangle = \langle w^*,\ T(x_n)\rangle = \langle T^*(w^*),\ x_n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

令 $n \to \infty$, 得到

$$\langle w^*,\ y_0\rangle = \langle T^*(w^*),\ \hat{x}_0\rangle,$$

其中 $y_n \to y_0$ $(n \to \infty)$. 另一方面，又有

$$\langle w^*,\ y_0\rangle = \langle w^*,\ T(x_0)\rangle = \langle T^*(w^*),\ x_0\rangle,$$

于是 $\forall w^* \in D(T^*)$, 有

$$\langle T^*(w^*),\ \hat{x}_0 - x_0\rangle = 0.$$

应用 Banach 闭值域定理 (见 [Yo]), 有

$$\hat{x}_0 - x_0 \in R(T^*)^{\perp} = N(T),$$

因此 $T(\hat{x}_0) = T(x_0)$. 换言之，有

$$\hat{x}_0 \in T^{-1}T(x_0) = T^{-1}(y_0).$$

因为范数是弱下半连续的，由 (4.3.12) 及 (4.3.14), 得

$$\|\hat{x}_0\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x_0\|.$$

因为 X 为严格凸空间， $T^{-1}(y_0)$ 为 X 中闭凸子集，从而为 Chebyshev 子集. 因此， $\hat{x}_0 = \pi(T^{-1}(y_0):\theta) = x_0$. 这与 (4.3.14) 矛盾. 因此 (4.3.13) 为真. □

§4.4 度量右逆与度量左逆

度量右逆与度量左逆是度量广义逆的两种重要的特例. 分别与最小范数解与极值解有关.

1. 度量右逆

定义 4.4.1 设 X, Y 为 Banach 空间， $T \in L(X,Y)$ 为线性算子. 如果 $\overline{N(T)}$ 为 X 的逼近子空间，齐性集值映射 $T_r^{\partial}: Y \to D(T)$ 满足:

(i) $TT_r^{\partial} = I_Y$;

(ii) $T_r^{\partial}T = I_{D(T)} - \mathcal{P}_{\overline{N(T)}}$,

则称 T_r^{∂} 为 T 的集值度量右逆.

如果 $\overline{N(T)}$ 为 X 的 Chebyshev 子空间，齐性算子 $T_r^M: Y \to D(T)$ 满足:

(i)′ $TT_r^M = I_Y$;

(ii)′ $T_r^M T = I_{D(T)} - \pi_{\overline{N(T)}}$,

则称为 T 的度量右逆.

定理 4.4.1 设 X, Y 为 Banach 空间, X 自反， $T \in L(X,Y)$ 为稠定的闭线性算子，或为 X 上的有界线性算子，则 T 为满射当且仅当 T 有集值度量右逆 T_r^{∂}, 此时

$$T_r^{\partial}(y) = \mathcal{P}(T^{-1}(y):\theta),\ y \in Y.$$

证明 必要性. 设 T 为满射，即 $R(T) = Y$. $\forall y \in Y$, $T^{-1}(y) = \{x \in D(T): T(x) = y\}$ 为 X 中的闭凸集. 因 X 自反，故 $T^{-1}(y)$ 为 X 中的逼近集. 因此, $\mathcal{P}(T^{-1}(y):\theta) \neq \varnothing$. 定义

$$T_r^\partial(y) = \mathcal{P}(T^{-1}(y) : \theta),\ y \in Y.$$

对 $y \in Y$, 任取 $x \in T_r^\partial(y)$, 有 $x \in T^{-1}(y)$, 从而 $T(x) = y$. 因此 $TT_r^\partial(y) = I_Y$.

又 $\forall x \in D(T)$, $T(x) \in Y$, 从而

$$T_r^\partial T(x) = \mathcal{P}(T^{-1}T(x) : \theta) = \mathcal{P}(x + N(x) : \theta).$$

由 (4.1.9) 式，得

$$T_r^\partial T(x) = (I_{D(x)} - \mathcal{P}_{N(T)})(x).$$

因此 T_r^∂ 为 T 的集值度量右逆.

充分性. 设存在 T 的集值度量右逆 $T_r^\partial : Y \to D(T)$, 则 $\forall y \in Y$, 选 $x \in T_r^\partial(y)$, 有 $T(x) \in TT_r^\partial(y) = \{y\}$. 因此， $T(x) = y$, 即 T 为满射. □

定理 4.4.2 设 X, Y 为 Banach 空间， X 自反. $T \in L(X, Y)$ 为稠定的闭线性算子或为定义在 X 上的有界线性算子. 如果 T 为满射，则 T 的集值度量右逆 T_r^∂ 可表示为

$$T_r^\partial = F_X^{-1}T^*(TF_X^{-1}T^*)^{-1} \cap T^{-1}.$$

当 X 自反、光滑、严格凸时，有

$$T_r^M = F_X^{-1}T^*(TF_X^{-1}T^*)^{-1}.$$

当 X 为 Hilbert 空间，且设 $X = X^*$ 时，有

$$T_r^M = T^*(TT^*)^{-1},$$

这里 T^* 为 T 的共轭算子.

证明 (i) 因为 T 为满射，由定理 4.4.1, T_r^∂ 存在，且 $\forall y \in Y$, 有

$$T_r^\partial(y) = \mathcal{P}(T^{-1}(y) : \theta).$$

$\forall x_0 \in T_r^\partial(y) = \mathcal{P}(T^{-1}(y) : \theta)$, 由定理 1.2.7, 存在 $x_1^* \in F_X(\theta - x_0) = -F_X(x_0)$, 满足

$$\langle x_1^*, x_0 - x\rangle \geqslant 0,\ \forall x \in T^{-1}(y).$$

取 $x_0^* = -x_1^*$, 则 $x_0^* \in F_X(x_0)$, 且

$$\langle x_0^*, x_0 - x\rangle \leqslant 0,\quad \forall x \in T^{-1}(y). \tag{4.4.1}$$

对任意的 $v \in N(T)$, $x_0 - v \in T^{-1}(y)$, 由 (4.4.1), 以 $x_0 - v$ 代 x 得 $\langle x_0^*, v\rangle \leqslant 0$, $\forall v \in N(T)$. 再由 $N(T)$ 的线性知

$$x_0^* \in N(T)^\perp \subset X^*.$$

因为 T 为稠定的闭线性算子或定义在 X 上的有界线性算子，从而 T 的共轭算子有定义. 因 $R(T) = Y$, 由 Banach 闭值域定理，有 $N(T)^\perp = R(T^*)$, 从而存在 $y_0^* \in Y^*$, 使得 $x_0^* = T^*(y_0^*)$. 又因为 $x_0 \in F_X^{-1}(x_0^*)$, 从而

$$x_0 \in F_X^{-1}T^*(y_0^*), \tag{4.4.2}$$

于是，得到

$$y = T(x_0) \in TF_X^{-1}T^*(y_0^*).$$

由集值映射的逆映射的定义，有

$$y_0^* \in (TF_X^{-1}T^*)^{-1}(y). \tag{4.4.3}$$

结合 (4.4.2) 与 (4.4.3), 得

$$x_0 \in F_X^{-1}T^*(TF_X^{-1}T^*)^{-1}(y).$$

由于 $T_r^{\partial}(y) \subset T^{-1}(y)$, 从而有

$$\begin{aligned} T_r^{\partial}(y) &\subset F_X^{-1}T^*(TF_X^{-1}T^*)^{-1}(y) \cap T^{-1}(y) \\ &= (F_X^{-1}T^*(TF_X^{-1}T^*)^{-1} \cap T^{-1})(y),\ y \in Y. \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

反之，$\forall x_0 \in F_X^{-1}T^*(TF_X^{-1}T^*)^{-1}(y) \cap T^{-1}(y)$, 不失一般性，设 $x_0 \neq \theta$, 选 $y_0^* \in (TF_X^{-1}T^*)^{-1}(y)$, 使得 $x_0 \in F_X^{-1}T^*(y_0^*)$ 且 $T(x_0) = y$.

记 $x_0^* = T^*(y_0^*) \in R(T^*) = N(T)^{\perp}$, 则 $x_0^* \in F_X(x_0) \cap N(T)^{\perp}$. 从而对任意 $x \in T^{-1}(y)$, 有 $x_0 - x \in N(T)$. 由对偶映射 F_X 的定义，有

$$\begin{aligned} \|x_0\|^2 = \langle x_0^*, x_0\rangle &= \langle x_0^*, x_0 - x\rangle + \langle x_0^*, x\rangle \\ &= \langle x_0^*, x\rangle \leqslant \|x_0^*\|\|x\|. \end{aligned}$$

因此，有 $\|x_0\| \leqslant \|x\|$, $\forall x \in T^{-1}(y)$. 于是 $x_0 \in \mathcal{P}(T^{-1}(y):\theta) = T_r^{\partial}(y)$, 即

$$F_X^{-1}T^*(TF_X^{-1}T^*)^{-1}(y) \cap T^{-1}(y) \subset T_r^{\partial}(y). \tag{4.4.5}$$

综合 (4.4.4) 与 (4.4.5) 有

$$T_r^{\partial} = F_X^{-1}T^*(TF_X^{-1}T^*)^{-1} \cap T^{-1}.$$

(ii) 若 X 为自反、光滑、严格凸的 Banach 空间，则 F_X 及 $F_X^{-1} = F_{X^*}$ 为一一到上的映射. 因为 T 为满射，故 T 的度量右逆 T_r^M 存在. 由 (i) 只需证: $TF_X^{-1}T^*: D(T^*) \to Y$ 为一一到上的映射.

假设 $y_1^*, y_2^* \in D(T^*)$ 满足

$$TF_X^{-1}T^*(y_1^*) = TF_X^{-1}T^*(y_2^*),$$

则

$$\begin{aligned} &\langle F_X^{-1}T^*(y_1^*) - F_X^{-1}T^*(y_2^*),\ T^*(y_1^*) - T^*(y_2^*)\rangle \\ &= \langle TF_X^{-1}T^*(y_1^*) - TF_X^{-1}T^*(y_2^*),\ y_1^* - y_2^*\rangle \end{aligned}$$

$$= 0.$$

由于 X^* 为严格凸的，且 $F_X^{-1} = F_{X^*}$, 由定理 1.2.4, F_X^{-1} 为严格单调的或单射，从而

$$T^*(y_1^*) = T^*(y_0^*).$$

$\forall y \in Y$, 因 T 为满射，有 $x \in D(T)$ 使 $y = T(x)$, 从而

$$\begin{aligned}\langle y_1^* - y_2^*,\ y\rangle &= \langle y_1^* - y_2^*,\ T(x)\rangle \\ &= \langle T^*(y_1^*) - T^*(y_2^*),\ x\rangle \\ &= 0,\end{aligned}$$

因而 $y_1^* = y_2^*$, 即 $TF_X^{-1}T^*$ 为单射.

又对任意 $y \in Y$, 有 $T_r^M(y) = \pi(T^{-1}(y) : \theta)$, 从而由定理 1.2.8 中 (1)$\Leftrightarrow$ (5), 有

$$x_1^* \in F_X(\theta - T_r^M(y)) = -F_X(T_r^M(y)),$$

$$\langle x_1^*, T_r^M(y) - x\rangle \geqslant 0,\ \forall x \in T^{-1}(y).$$

用类似 (4.4.1) 与 (4.4.2) 的证明，得到 $y_0^* \in D(T^*)$. 使得

$$T_r^M(y) = F_X^{-1}T^*(y_0^*), \tag{4.4.6}$$

从而

$$y = TT_r^M(y) = TF_X^{-1}T^*(y_0^*),$$

即 $TF_X^{-1}T^*$ 为满射.

由 (i), 得

$$T_r^M = F_X^{-1}T^*(TF_X^{-1}T^*)^{-1}.$$

(iii) 因 $X = X^*$, 故 $F_X = I$. 从而由 (ii) 得到 (iii). □

2. 度量左逆

定义 4.4.2 设 X, Y 为 Banach 空间， $T \in L(X, Y)$ 为线性算子. 如果 $\overline{R(T)}$ 为 Y 中的逼近子空间，且存在齐性集值映射 $T_l^\partial : D^M \to D(T)$ 满足

(i) $T_l^\partial T = I_{D(T)}$;

(ii) $TT_l^\partial = \mathcal{P}_{\overline{R(T)}}$, 在 D^M 上，

则称 T_l^∂ 为集值度量左逆，其中 $D^M = R(T) \dot{+} F_X^{-1}(R(T)^\perp)$.

如果 $\overline{R(T)}$ 为 Y 中 Chebyshev 子空间，存在齐性算子 $T_l^M : D^M \to D(T)$ 满足

(i)$'$ $T_l^M T = I_{D(T)}$;

(ii)$'$ $TT_l^M = \pi_{\overline{R(T)}}$, 在 D^M 上，

则称 T_l^M 为 T 的度量左逆.

定理 4.4.3 设 X, Y 为 Banach 空间，且 $T \in L(X, Y)$ 为线性算子，$\overline{R(T)}$ 为 Chebyshev 子空间，则存在 T 的度量左逆 T_l^M 当且仅当 T 为单射，此时

$$T_l^M(y) = T^{-1}\pi_{\overline{R(T)}}, \quad y \in D^M.$$

证明 必要性. 设 $x_1, x_2 \in D(T)$, $T(x_1) = T(x_2)$, 由定义 4.4.2 中 (i)′.

$$\begin{aligned} x_1 =& I_{D(T)}(x_1) = T_l^M T(x_1) \\ =& T_l^M T(x_2) = I_{D(T)}(x_2) = x_2. \end{aligned}$$

即 T 为单射.

充分性. 设 T 为单射, 则 $T^{-1} : R(T) \to D(T)$ 为单值算子.

因 $\overline{R(T)}$ 为 Y 的 Chebyshev 子空间, 由推论 1.2.11, $\forall y \in D^M$, 有唯一分解:

$$y = \pi_{\overline{R(T)}}(y) + y_2, \quad y_2 \in F_Y^{-1}(R(T)^{\perp}).$$

另一方面, 由 D^M 的定义有,

$$y = y_0 + y_1, \quad y_0 \in R(T),\ y_1 \in F_Y^{-1}(R(T)^{\perp}).$$

从而 $\pi_{\overline{R(T)}}(y) = y_0 \in R(T)$. 于是可定义

$$T^{\#}(y) := T^{-1}\pi_{\overline{R(T)}}(y), \quad y \in D^M.$$

首先, $\forall x \in D(T)$,

$$T^{\#}T(x) = T^{-1}\pi_{\overline{R(T)}}(T(x)) = x.$$

即 $T^{\#}T = I_{D(T)}$. 又 $\forall y \in D^M$, 有

$$TT^{\#}(y) = \pi_{\overline{R(T)}}(y),$$

即 $TT^{\#} = \pi_{\overline{R(T)}}$, 因此 $T^{\#}$ 为 T 的度量左逆.

设 T_l^M 为 T 的任一度量左逆, 则 $\forall y \in D^M$, 有

$$TT_l^M(y) = \pi_{\overline{R(T)}}(y) = TT^{\#}(y).$$

由于 T 为单射, 故

$$T_l^M(y) = T^{\#}(y) = T^{-1}\pi_{\overline{R(T)}}(y).$$

因此

$$T_l^M = T^{-1}\pi_{\overline{R(T)}}.$$

□

定理 4.4.4 设 X, Y 为 Banach 空间, 且 Y 自反、光滑、严格凸. $T \in L(X, Y)$ 为稠定的闭线性算子或定义在 X 上的有界线性算子. 如果 T 为单射, 且 $R(T)$ 闭, 则 $\forall y \in Y$, 存在 $x_y \in F_Y^{-1}(N(T^*))$, 满足

$$T_l^M(y) = (T^*F_YT)^{-1}T^*F_Y(x_y + y).$$

特别, 当 Y 为 Hilbert 空间时,

$$T_l^M = (T^* F_Y T)^{-1} T^* F_Y.$$

如令 $Y^* = Y$, 则 $T_l^M = (T^*T)^{-1}T^*$.

证明 易知 $D^M = Y$, 且由定理 4.4.3, $\forall y \in Y$, 有

$$T_l^M(y) = T^{-1}\pi_{R(T)}(y).$$

从而 $TT_l^M(y) = \pi_{R(T)}(y)$. 由定理 1.2.9,

$$F_Y(TT_l^M(y) - y) \cap R(T)^\perp \neq \varnothing.$$

由于 $R(T)^\perp = N(T^*)$, 可取 $y^* \in F_Y(TT_l^M(y) - y) \cap N(T^*)$, 从而

$$TT_l^M(y) \in F_Y^{-1}(N(T^*)) + y.$$

选 $x_y \in F_Y^{-1}(N(T^*))$, 使

$$TT_l^M(y) = x_y + y.$$

于是

$$T^* F_Y TT_l^M(y) = T^* F_Y(x_y + y).$$

我们首先断言：

$$T^* F_Y T : D(T) \to R(T^*) \subset X^* \tag{4.4.7}$$

为一一到上的映射，于是

$$T_l^M(y) = (T^* F_Y T)^{-1} T^* F_Y(x_y + y).$$

为证 $T^* F_Y T$ 为双射，首先设 $x_1, x_2 \in D(T)$, 使

$$T^* F_Y T(x_1) = T^* F_Y T(x_2),$$

则

$$\begin{aligned} &\langle F_Y T(x_1) - F_Y T(x_2),\ T(x_1) - T(x_2)\rangle \\ = &\langle T^* F_Y T(x_1) - T^* F_Y T(x_2),\ x_1 - x_2\rangle = 0. \end{aligned}$$

由 Y 的严格凸性，知 F_Y 为严格单调的，从而

$$T(x_1) = T(x_2).$$

又因 T 为单射，故 $x_1 = x_2$. 于是 $T^* F_Y T$ 为单射.

对于 $x^* \in R(T^*) \subset X^*$, 定义 $f(y) = \langle x^*,\ T^{-1}(y)\rangle$, $y \in R(T)$. 因 $R(T)$ 闭，T 为单射，从而由闭图像定理或逆算子定理， $T^{-1} : R(T) \to D(T)$ 为有界线性算子，因此 $f(y)$ 为 $R(T)$ 上有界线性泛函．由 Hahn-Banach 定理，将其保范延拓到 Y 上，从而存在 $y^* \in Y^*$, 使

$$\langle y^*, y\rangle = \langle x^*, T^{-1}(y)\rangle,\quad \forall y \in R(T).$$

于是

$$\langle x^*, x\rangle = \langle y^*, T(x)\rangle, \quad \forall x \in D(T).$$

因此，$y^* \in D(T^*)$, 且 $x^* = T^*(y^*)$. 设

$$(T^*)^{-1}(x^*) = \{y^* \in Y^* : T^*(y^*) = x^*\}.$$

因 T^* 为稠定的闭线性算子或定义在 Y^* 上的有界线性算子且 $R(T^*)$ 闭,则 $(T^*)^{-1}(x^*)$ 为 Y^* 中闭凸集.

因为 Y^* 也是自反、光滑、严格凸的 Banach 空间,从而唯一存在 $y_0^* \in (T^*)^{-1}(x^*)$, 使

$$\|y_0^*\| = \min\{\|y^*\| : y^* \in (T^*)^{-1}(x^*)\}.$$

用类似定理 4.4.2 中 (4.4.1) 到 (4.4.2) 的证明，以 T^*、y_0^*、y^* 分别代替 T、x_0、x, 可知：存在 $y_0 \in (N(T^*))^\perp$ 使得

$$y_0^* = F_{Y^*}^{-1} y_0.$$

因为 Y 是自反、光滑、严格凸 Banach 空间，故 $F_{Y^*}^{-1} = F_Y$. 由 Banach 闭值域定理，$(N(T^*))^\perp = R(T^{**}) = R(T)$, 于是 $y_0 \in R(T)$, 因而存在 $x \in D(T)$, 使 $y_0 = T(x)$, 从而

$$y_0^* = F_Y T(x),$$

于是

$$x^* = T^*(y_0^*) = T^* F_Y T(x).$$

因此，$T^* F_Y T$ 为满射.

综合上述，$T^* F_Y T : D(T) \to R(T^*)$ 为一一到上的映射. □

【注　释】

设 X, Y 为 Banach 空间, $Tx = y$ 为算子方程,其中 $T \in L(X, Y)$. 当 $N(T) \neq \{\theta\}$ 或 $y \notin R(T)$, 为讨论其最佳逼近解,无论是 T 的线性斜投影广义逆,还是 T 的 Drazin 广义逆均不能解决这一问题. 因此应该引入度量广义逆. 由于度量广义逆一般为非线性的，且与空间几何性质有关，故研究起来须用不同的方法.　Holmes[H1] 首先开始研究度量广义逆.

§4.1　1974 年，M. Z. Nashed 与 G. R. Votruba[NV] 提出研究集值度量广义逆单值选择的建议. 王玉文，潘少荣 [WP2] 给出有界齐性选择的条件，定理 4.1.4 取自 [WP2]. 定理 4.1.3 及定理 4.1.5 取自王玉文，郑文晶的待发表论文.

§4.2　曾远荣 (Y.Y.Tseng) 为 Hilbert 空间中线性算子 (不需有界) 引入 Tseng 广义逆. 王玉文，季大琴在 Banach 空间中引入 Tseng 度量广义逆的定义，并给出存在性的判据. 定理 4.2.1 取自 [WJ], 最大的 Tseng 广义逆为 Moore-Penrose 度量广义逆.

§4.3 王玉文，李志伟首先研究 Banach 空间中 Moore-Penrose 度量广义逆. 定理 4.4.2 取自 [WL], 而王辉，王玉文 [WhW] 系统深入地研究了 Moore-Penrose 度量广义逆，定义 4.3.1 及主要定理 4.3.3, 取自 [WhW].

§4.4 本节内容取自王玉文，王辉，王润杰的论文 [WWW], 推广了王玉文在 1989 年的研究工作 [Wa1] 及 J. P. Aubin 的相应结果 (见 [Wa1] 的参考文献).

度量广义逆扰动的稳定性，连续性，集值度量广义逆的连续选择等问题均有待进一步研究.

第五章　线性算子的齐性广义逆与多值线性算子的度量广义逆

设 X, Y 为 Banach 空间, $T \in L(X,Y)$ 为线性算子. T 的线性斜投影广义逆, 单值度量广义逆均为齐性算子. 本章首先利用拟线性投影算子给出 T 的齐性广义逆的统一定义, 及存在性的统一判据 (见 [WL]).

其次对于从 X 到 Y 的多值线性算子 M, 为讨论线性包含 $y \in M(x)$ 的最佳逼近解, 本章利用度量投影算子讨论 M 的度量广义逆, 并应用于线性包含最佳逼近解问题 (见 [WL], [LN1]). 最后, 对于 X, Y 均为 Hilbert 空间的情形, 讨论约束最小化问题及其在奇异最优控制中的应用 (见 [LN2]).

§5.1　线性算子的 Moore-Penrose 齐性广义逆

定义 5.1.1　设 $T \in L(X,Y)$ 为从 X 到 Y 的线性算子, $N(T)$, $R(T)$ 分别为 T 的零空间与值域. 如果存在分别从 X, Y 到 $\overline{N(T)}$, $\overline{R(T)}$ 上的有界拟线性投影算子 $S_{\overline{N(T)}}$ 与 $S_{\overline{R(T)}}$, 且存在从 Y 到 X 的齐性算子 T^h, 满足 $R(T) \subset D(T^h)$ 及

(i) $TT^hT = T$, 在 $D(T)$ 上;

(ii) $T^hTT^h = T^h$, 在 $D(T^h)$ 上;

(iii) $T^hT = I_{D(T)} - S_{\overline{N(T)}}$, 在 $D(T)$ 上;

(iv) $TT^h = S_{\overline{R(T)}}$, 在 $D(T^h)$ 上,

则 T^h 称为 Moore-Penrose 齐性广义逆.

如果 $TT^h = I_Y$, $T^hT = I_{D(T)} - S_{\overline{N(T)}}$ 于 $D(T)$ 上, 则称 T^h 为齐性投影右逆; 如果 $T^hT = I_{D(T)}$ 于 $D(T)$ 上, $TT^h = S_{\overline{R(T)}}$ 于 $D(T^h)$ 上, 则称 T^h 为齐性投影左逆.

定理 5.1.1　设 $T \in L(X,Y)$ 为从 X 到 Y 的线性算子. 存在 T 的从 Y 到 X 的 Moore-Penrose 齐性广义逆 T^h, 当且仅当存在分别从 X, Y 到 $\overline{N(T)}$, $\overline{R(T)}$ 上的有界拟线性投影算子 $S_{\overline{N(T)}}$ 与 $S_{\overline{R(T)}}$ 及齐性集合 $D(T^h)$, 满足 $R(T) \subset D(T^h)$, 且

$$D(T^h) \subset R(T) \dotplus S^{-1}_{\overline{R(T)}}(\theta), \tag{5.1.1}$$

$$D(T) = N(T) \dotplus C(T), \tag{5.1.2}$$

这里 $C(T) = D(T) \cap S^{-1}_{\overline{N(T)}}(\theta)$.

证明　必要性. 设 T^h 为 T 的从 Y 到 X 的 Moore-Penrose 齐性广义逆, 则 $D(T^h)$ 为齐性集且 $R(T) \subset D(T^h)$, 同时存在有界拟线性投影算子 $S_{\overline{N(T)}}$ 与 $S_{\overline{R(T)}}$.

对任意 $y \in D(T^h)$, 由定义 5.1.1, 有

$$S_{\overline{R(T)}}(y) = TT^h(y) \in R(T).$$

由 $S_{\overline{R(T)}}$ 的拟可加性，得

$$S_{\overline{R(T)}}(y - S_{\overline{R(T)}}(y)) = S_{\overline{R(T)}}(y) - S_{\overline{R(T)}}(y) = \theta,$$

从而

$$y - S_{\overline{R(T)}}(y) \in S^{-1}_{\overline{R(T)}}(\theta),$$

于是

$$y = S_{\overline{R(T)}}(y) + (y - S_{\overline{R(T)}}(y)) \in R(T) + S^{-1}_{\overline{R(T)}}(\theta).$$

但由 $S_{\overline{R(T)}}$ 的幂等性及拟可加性，知 $R(T) \cap S^{-1}_{\overline{R(T)}} - S^{-1}_{\overline{R(T)}} = \{\theta\}$, 因此

$$D(T^h) \subset R(T) \dot{+} S^{-1}_{\overline{R(T)}}(\theta),$$

(5.1.1) 为真.

对任意的 $x \in D(T), TT^hT(x) = T(x)$, 从而 $T^hT(x) \in D(T)$, 再由定义 5.1.1(iii), 有

$$S_{\overline{N(T)}}(x) = x - T^hT\ (x) \in D(T).$$

于是由 T 的线性，有

$$\begin{aligned} T(S_{\overline{N(T)}}(x)) &= T(x - T^hT(x)) \\ &= T(x) - TT^hT(x) \\ &= \theta. \end{aligned}$$

因此，有

$$S_{\overline{N(T)}}(x) \in N(T), x \in D(T).$$

由 $S_{\overline{N(T)}}$ 的拟可加性，有

$$S_{\overline{N(T)}}(x - S_{\overline{N(T)}}(x)) = S_{\overline{N(T)}}(x) - S_{\overline{N(T)}}(x) = \theta.$$

由此导出

$$x = S_{\overline{N(T)}}(x) + (x - S_{\overline{N(T)}}(x)) \in N(T) + C(T),$$

这里 $C(T) = S^{-1}_{\overline{N(T)}}(\theta) \cap D(T)$, 且显然有 $N(T) \cap C(T) - C(T) = \{\theta\}$, 于是

$$D(T) = N(T) \dot{+} C(T),$$

故 (5.1.2) 为真.

充分性. 设 (5.1.1), (5.1.2) 为真，且集合 $D(T^h)$ 满足 $R(T) \subset D(T^h)$.

首先证: $T : C(T) \to R(T)$ 为一对一的.

设 $x_1, x_2 \in C(T)$ 满足 $T(x_1) = T(x_2)$, 则 $x_1 - x_2 \in N(T)$ 且 $S_{\overline{N(T)}}(x_1) = S_{\overline{N(T)}}(x_1) = \theta$. 假如 $x_1 \neq x_2$, 注意 $\theta \in N(T), x_1 - x_2 \in N(T)\backslash\{\theta\}$ 且 $x_1, x_2 \in C(T)$, 有

$$x_1 = \theta + x_1 = (x_1 - x_2) + x_2. \tag{5.1.3}$$

这与 (5.1.2) 式矛盾. 因此 $x_1 = x_2$, 即 T 为一对一的.

记 T 在集合 $C(T)$ 上的限制 $T_{C(T)}$ 为 T_0. 由于 $C(T)$ 为齐性集合，即 $x \in C(T)$,

$\lambda \in R$, 有 $\lambda x \in C(T)$, $T: D(T) \to R(T)$ 为线性算子，则 $T_0^{-1}: R(T) \to C(T)$ 为齐性算子.

定义映射 $T^h: D(T^h) \to D(T)$ 如下：对于 $y \in D(T^h) \subset R(T)\dot{+}S_{\overline{R(T)}}^{-1}(\theta)$ 有唯一分解 $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in R(T)$, $y_2 \in S_{\overline{R(T)}}^{-1}(\theta)$, 定义

$$T^h(y) = T_0^{-1}(y_1). \tag{5.1.4}$$

由 $S_{\overline{R(T)}}$ 的拟可加性，并注意到 $S_{\overline{R(T)}}(y_2) = \theta$, 有

$$\begin{aligned} S_{\overline{R(T)}}(y) &= S_{\overline{R(T)}}(y_1 + y_2) \\ &= y_1 + S_{\overline{R(T)}}(y_2) = y_1 \in R(T). \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

综合 (5.1.4), (5.1.5), 有

$$T^h(y) = T_0^{-1}S_{\overline{R(T)}}(y), y \in C(T). \tag{5.1.6}$$

则 $T^h: D(T^h) \to C(T)$ 为齐性算子.

对于 $y \in D(T^h)$, 由 (5.1.6) 有

$$TT^h(y) = TT_0^{-1}S_{\overline{R(T)}}(y) = S_{\overline{R(T)}}(y),$$

即在 $D(T^h)$ 上，有

$$TT^h = S_{\overline{R(T)}}. \tag{5.1.7}$$

再由 $S_{\overline{R(T)}}$ 的等幂性，对 $y \in D(T^h)$ 有

$$\begin{aligned} T^hTT^h(y) &= T^hS_{\overline{R(T)}}(y) \\ &= T_0^{-1}S_{\overline{R(T)}}^2(y) \\ &= T_0^{-1}S_{\overline{R(T)}}(y) \\ &= T^h(y), \end{aligned}$$

即在 $D(T^h)$ 上，有

$$T^hTT^h = T^h. \tag{5.1.8}$$

对于 $x \in D(T)$, (5.1.2) 式蕴涵 x 有唯一分解：

$$x = S_{\overline{N(T)}}(x) + x_2,$$

这里 $S_{\overline{N(T)}}(x) \in N(T)$, $x_2 \in C(T)$. 于是

$$\begin{aligned} T^hT(x) &= T^hT(S_{\overline{N(T)}}(x) + x_2) \\ &= T^hT(x_2) = T_0^{-1}S_{\overline{R(T)}}T(x_2) \end{aligned}$$

$$= x_2 = (I_{D(T)} - S_{\overline{N(T)}})(x),$$

即在 $D(T)$ 上

$$T^h T = I_{D(T)} - S_{\overline{N(T)}}. \tag{5.1.9}$$

同时，对上面的 x, 有

$$TT^hT(x) = T(x - S_{\overline{N(T)}}(x)) = T(x),$$

在 $D(T)$ 上，又有

$$TT^hT = T. \tag{5.1.10}$$

综合 (5.1.8)~(5.1.10), T^h 为 T 的 Moore-Penrose 齐次广义逆. □

定理 5.1.2 设 $T \in L(X, Y)$ 为线性算子.

(i) T 有齐性投影右逆当且仅当 T 为满射，且存在有界拟线性投影算子 $S_{\overline{N(T)}}$ 满足

$$D(T) = N(T) \dot{+} C(T), \tag{5.1.11}$$

这里 $C(T) = D(T) \cap S^{-1}_{\overline{N(T)}}(\theta)$.

(ii) T 有齐性投影左逆当且仅当 T 为单射，且存在有界拟线性投影算子 $S_{\overline{R(T)}}$ 及齐性集 $D(T^h)$ 满足

$$R(T) \subset D(T^h) \subset R(T) \dot{+} S^{-1}_{\overline{R(T)}}(\theta). \tag{5.1.12}$$

证明 (i) 必要性. 设 T^h 为 T 的齐性投影右逆，由定义 5.1.1, 存在有界拟线性投影算子 $S_{\overline{N(T)}}$ 满足 $TT^h = I_Y$, $T^hT = I_{D(T)} - S_{\overline{N(T)}}$.

对任意 $y \in Y$, 有 $TT^h(y) = y$, 令 $x = T^h(y) \in D(T)$, 则 $y = T(x)$, T 为满射.

对任意 $x \in D(T)$, 由 $TT^h = I_Y$ 有 $TT^hT(x) = T(x)$, 从而 $T^hT(x) \in D(T)$, 因此 $S_{\overline{N(T)}}(x) = x - T^hT(x) \in N(T)$. 由 $S_{\overline{N(T)}}$ 的拟可加性及幂等性，类似 (5.1.2) 的证明，有

$$D(T) = N(T) \dot{+} C(T),$$

这里 $C(T) = D(T) \cap S^{-1}_{\overline{N(T)}}(\theta)$.

充分性. 设 T 为满射, 存在有界拟线性投影算子 $S_{\overline{N(T)}}$ 满足 (5.1.11). 类似定理 5.1.1 的证明， $T_0 = T_{C(T)}$ 为从 $C(T)$ 到 Y 上的一对一齐性算子. $T_0^{-1} : Y \to C(T)$ 为齐性算子. 定义 $T^h = T_0^{-1}$, 则显然 $TT^h = I_Y$. 对 $x \in D(T)$, 由 (5.1.11) 式，有唯一分解

$$x = S_{\overline{N(T)}}(x) + x_2\ ,\ x_2 \in C(T),$$

这里 $S_{\overline{N(T)}}(x) \in N(T)$, $C(T) = D(T) \cap S^{-1}_{\overline{N(T)}}\theta$.

$$\begin{aligned} T^hT(x) &= T_0^{-1}T(S_{\overline{N(T)}}(x) + x_2) \\ &= T_0^{-1}T(x_2) = x_2 \end{aligned}$$

$$= (I_{D(T)} - S_{\overline{N(T)}})(x),$$

即在 $D(T)$ 上

$$T^h T = I_{D(T)} - S_{\overline{N(T)}}.$$

T^h 为 T 的齐次投影右逆.

(ii) 必要性. 设 T^h 为 T 的齐性投影左逆, 则 $D(T^h)$ 为齐性集且 $R(T) \subset D(T^h)$, $T^h T = I_{D(T)}$, $TT^h = S_{\overline{R(T)}}$.

设 $x_1, x_2 \in D(T)$ 满足 $T(x_1) = T(x_2)$ 则

$$T(x_1 - x_2) = \theta.$$

因为 T^h 为齐性的, 则

$$\theta = T^h(\theta) = T^h T(x_1 - x_2) = x_1 - x_2,$$

即 $x_1 = x_2$, T 为单射.

对于任意 $y \in D(T^h)$, 有 $S_{\overline{R(T)}}(y) = TT^h(y) \in R(T)$. 由 $S_{\overline{R(T)}}$ 的拟可加性与幂等性, 有

$$y = S_{\overline{R(T)}}(y) + (y - S_{\overline{R(T)}}(y)) \in R(T) \dot{+} S^{-1}_{\overline{R(T)}}(\theta),$$

即

$$D(T^h) \subset R(T) \dot{+} S^{-1}_{\overline{R(T)}}(\theta).$$

充分性. 设 T 为单射, 且存在有界拟线性投影算子 $S_{\overline{R(T)}}$ 及齐性集 $D(T^h)$ 满足 (5.1.12).

对 $y \in D(T^h)$, 由 (5.1.12) 易知 $S_{\overline{R(T)}}(y) \in R(T)$. 定义

$$T^h(y) = T^{-1} S_{\overline{R(T)}}(y), \tag{5.1.13}$$

这里 $T^{-1} : R(T) \to D(T)$ 为 T 的逆算子.

$$T^h T(x) = T^{-1} S_{\overline{R(T)}} T(x) = x \ , \ x \in D(T),$$

即 $T^h T = I_{D(T)}$. 又对 $y \in D(T^h)$, 有

$$TT^h(y) = S_{\overline{R(T)}}(y),$$

这里 T^h 为 T 的齐性投影左逆.

定理 5.1.3 设 $T \in L(X, Y)$ 为线性算子, 假定 $N(T)$ 与 $R(T)$ 为 Chebyshev 子空间. 又设 T 存在 Morre-Penrose 齐性广义逆 T^h. T^h 恰为 T 的 Moore-Penrose 度量广义逆当且仅当

(i) $S^{-1}_{N(T)}(\theta) = F_X^{-1}(N(T)^{\perp})$,

(ii) $S^{-1}_{R(T)}(\theta) = F_Y^{-1}(R(T)^{\perp})$,

这里 $S_{N(T)}, S_{R(T)}$ 分别为 X, Y 到 $N(T), R(T)$ 上的有界拟线性投影算子.

证明 必要性. 设 T^h 为 T 的 Moore-Penrose 度量广义逆, 则 $S_{\overline{N(T)}} = \pi_{N(T)}$. $S_{\overline{R(T)}} = \pi_{R(T)}$ 均为度量投影算子.

对于任意 $x \in S_{N(T)}^{-1}(\theta) = \pi_{N(T)}^{-1}(\theta)$, 则 $\pi_{N(T)}(x) = \theta$, 于是由定理 1.2.9 有

$$F_X(x-\theta) \cap N(T)^{\perp} \neq \varnothing.$$

于是

$$x \in F_X^{-1}(N(T)^{\perp}) = \{y \in X \mid F_X(y) \cap N(T)^{\perp} \neq \varnothing\}.$$

即

$$S_{N(T)}^{-1}(\theta) \subset F_X^{-1}(N(T)^{\perp}). \tag{5.1.14}$$

反之, 对任意 $x \in F_X^{-1}(N(T)^{\perp})$, 有 $F_X(x-\theta) \cap N(T)^{\perp} \neq \varnothing$. 再次应用定理 1.2.9, 并注意到 $N(T)$ 为 Chebyshev 子空间, 有 $\theta = \pi_{N(T)}(x) = S_{N(T)}(x)$, 即 $x \in S_{N(T)}^{-1}(\theta)$, 因此

$$F_X^{-1}(N(T)^{\perp}) \subset S_{N(T)}^{-1}(\theta). \tag{5.1.15}$$

由 (5.1.14), (5.1.15), 有

$$S_{N(T)}^{-1}(\theta) = F_X^{-1}(N(T)^{\perp}). \tag{5.1.16}$$

同理，有

$$S_{R(T)}^{-1}(\theta) = F_Y^{-1}(R(T)^{\perp}). \tag{5.1.17}$$

充分性. 假定 (5.1.16), (5.1.17) 为真. 对 $x \in X$, 因为 $N(T)$ 为 Chebyshev 子空间，由推论 1.2.11, 存在唯一元素 $x_2 \in F_X^{-1}(N(T)^{\perp}) = S_{N(T)}^{-1}(\theta)$, 满足

$$x = \pi_{N(T)}(x) + x_2. \tag{5.1.18}$$

由 $S_{N(T)}$ 的拟可加性，有

$$\begin{aligned} \|x - S_{N(T)}(x)\| &= \|x - S_{N(T)}(\pi_{N(T)}(x) + x_2)\| \\ &= \|x - \pi_{N(T)}(x) - S_{N(T)}^{-1}(x_2)\| \\ &= \|x - \pi_{N(T)}(x)\|. \end{aligned}$$

因为 $N(T)$ 为 Chebyshev 子空间，故

$$S_{N(T)}(x) = \pi_{N(T)}(x)\ ,\ x \in X.$$

同理，由条件 $S_{R(T)}^{-1}(\theta) = F_Y^{-1}(R(T)^{\perp})$ 得

$$S_{R(T)}(y) = \pi_{R(T)}(y)\ ,\ y \in Y.$$

因此，由定义 5.1.1 及定义 4.3.1, T^h 恰为 Moore-Penrose 度量广义逆. □

定理 5.1.4 设 X, Y 为自反 Banach 空间， $T \in L(X,Y)$ 为具有闭值域 $R(T)$ 的稠定闭线性算子. 则一定存在 T 的 Moore-Penrose 齐性广义逆 $T^h : Y \to D(T)$.

证明 由于 $N(T), R(T)$ 为 X, Y 中闭子空间，由 X, Y 的自反性，由定理 1.3.3 存在 X 到 $N(T)$ 上， Y 到 $R(T)$ 上的有界拟线性投影算子 $S_{N(T)}$ 及 $S_{R(T)}$. 因此，有直和分解

$$X = N(T) \dotplus S_{N(T)}^{-1}(\theta),$$

$$X = R(T)\dot{+}S_{R(T)}^{-1}(\theta),$$

其中 $N(T) = R(S_{N(T)}), R(T) = R(S_{R(T)})$.

设 T_0 为 T 在 $S_{N(T)}^{-1}(\theta)$ 上的限制，则 $T_0 : S_{N(T)}^{-1}(\theta) \to R(T)$ 为双射. 事实上，对任意 $y \in R(T)$, 存在 $x \in D(T)$, 使 $y = T(x)$. 将 x 分解为

$$x = S_{N(T)}(x) + (I - S_{N(T)})(x) = x_1 + x_2,$$

其中 $x_1 \in N(T), x_2 \in S_{N(T)}^{-1}(\theta)$. 显然

$$y = T(x_2) = T_0(x_2),$$

T_0 为满射.

又设 $x_1, x_2 \in S_{N(T)}^{-1}(\theta)$, 使 $T_0(x_1) = T_0(x_2)$, 从而 $x_1 - x_2 \in N(T)$. 如果 $x_1 \neq x_2$, 有

$$x_1 = \theta + x_1 = (x_1 - x_2) + x_2,$$

这与 $X = N(T)\dot{+}S_{N(T)}^{-1}(\theta)$ 矛盾. 因此 $x_1 = x_2$, 即 T 为单射. 定义

$$T^h(y) = T_0^{-1}S_{R(T)}(y), \quad y \in Y,$$

则易知 T^h 为 T 的 Moore-Perose 齐性广义逆. □

§5.2 Banach 空间中多值线性算子的度量广义逆

设 X, Y 为 Banach 空间，$A \subset X \times Y$ 为线性子空间. 取 $A(x) = \{y \in Y : \{x, y\} \in A\}$, 则 A 可以看成为从 X 到 Y 的多值线性算子. A 的定义域 $D(A)$ 、值域 $R(A)$ 及零空间 $N(A)$ 可以定义为

$$D(A) = \{\, x \in X |\ 存在\ \ y \in Y, \{x, y\} \in A\},$$

$$R(A) = \{\, y \in Y |\ 存在\ \ x \in X, \{x, y\} \in A\},$$

$$N(A) = \{\, x \in X |\ \{x, \theta\} \in A\}.$$

S. J. Lee 与 M. Z. Nashed[LN3] 引入 A 的线性斜投影广义逆 $A^{\#}$, 但 $A^{\#}$ 不能刻画线性包含 $y \in A(x)$ 的最佳逼近解问题. 为此，本节引入 A 的度量广义逆，仍记 $A^{\#}$.

下面的记号见 [AF], 对于 $A, B \subset X \times Y$, $C \subset Z \times X$, 有

$$AC := \{\ \{z, y\} \in Z \times Y \mid 存在\ \ x \in X,\ \{x, y\} \in A,\ \{z, x\} \in C\},$$

$$A + B := \{\ \{x, y + z\} \mid \ \{x, y\} \in A,\ \{x, z\} \in B\},$$

$$A\dot{+}B := \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

线性子空间 $R \subset X \times Y$ 称为 A 的代数算子部分，是指 R 为某单值算子的图像，且 $A = R\dot{+}(\{\theta\} \times M(\theta))$. 如果代数算子部分 R 又为 $X \times Y$ 中闭子空间，则称 R 为 A 的拓扑算子部分. 为导出 Hilbert 空间中线性包含的所有最小二乘解集的特征刻画， S. J. Lee 与 M. Z. Nashed[LN1] 引入 M 的正交算子部分与正交广义逆的概念. 在 Banach 空间中，我们有

定义 5.2.1 设 X, Y 为 Banach 空间， $A \subset X \times Y$ 为从 X 到 Y 的多值线性算子， $A(\theta)$ 为 Y 的 Chebyshev 子空间， $\pi_{A(\theta)}$ 为 Y 到 $A(\theta)$ 的度量投影算子，则 A 的度量算子部分 S_A 定义为：

$$S_A = \{\{g, (I - \pi_{A(\theta)})(y)\} | \{g, y\} \in A\}. \tag{5.2.1}$$

注记 1 (i) 如果 $A^{-1}(\theta) = N(A)$ 为 X 中的 Chebyshev 子空间，则

$$S_{A^{-1}} = \{\{y, (I - \pi_{N(A)})(g)\} | \{g, y\} \in A\}$$

为 M^{-1} 的度量算子部分.

(ii) 如果 X, Y 为 Hilbert 空间，则 $\pi_{A(\theta)}$ 为 Y 到 $A(\theta)$ 上的正交投影算子 $P_{A(\theta)}$，从而 S_A 恰为 A 的正交算子部分 (见 [LN1]).

(iii) $S_A = \text{graph}(I - \pi_{A(\theta)})A$.

定理 5.2.1 设 X, Y 为 Banach 空间， $A \subset X \times Y$ 为从 X 到 Y 的多值线性算子， $A(\theta)$ 为 Y 中的 Chebyshev 子空间，则 A 的度量算子部分 S_A 满足

(i) S_A 为某单值齐性算子的图像，

(ii) $A = S_A\dot{+}(\{\theta\} \times A(\theta))$.

(注：此时称 S_A 为 A 的齐性算子部分.)

证明 (i) 定义算子 $T: D(A) \to Y$ 为

$$T(g) = (I - \pi_{A(\theta)})(y), \ \forall g \in D(A) \text{ 且 } \{g, y\} \in A.$$

对 $\forall g \in D(A)$, 由 $D(A)$ 的定义, 存在 $y \in Y$ 满足 $\{g, y\} \in A$, 于是 $(I - \pi_{A(\theta)})(y)$ 为确定的.

设 $y_1, y_2 \in Y$ 满足 $\{g, y_i\} \in A (i = 1, 2)$. 需证

$$(I - \pi_{A(\theta)})(y_1) = (I - \pi_{A(\theta)})(y_2),$$

即 T 为单值算子.

由 A 的线性，有 $\{\theta, y_1 - y_2\} = \{g, y_1\} - \{g, y_2\} \in M$, 于是

$$y_1 - y_2 \in A(\theta). \tag{5.2.2}$$

另一方面，由推论 1.2.11, 对 y_i 有唯一分解

$$y_i = \pi_{A(\theta)}(y_i) + k_i, \quad k_i \in F_Y^{-1}(A(\theta)^{\perp}), \quad i = 1, 2.$$

假如 $k_1 \neq k_2$, 则 $k_1 - k_2 \neq \theta$ 且由 A 的线性, 有

$$k_1 - k_2 = (y_1 - y_2) + [\pi_{A(\theta)}(y_1) - \pi_{A(\theta)}(y_2)] \in A(\theta).$$

由注意到 $\theta \in A(\theta)$, 有

$$k_1 = \theta + k_1 = (k_1 - k_2) + k_2, \tag{5.2.3}$$

其中 $k_1, k_2 \in F_Y^{-1}(A(\theta)^{\perp})$. 由推论 1.2.11, 有 $Y = A(\theta) \dot{+} F_Y^{-1}(A(\theta)^{\perp})$, 这与 (5.2.3) 矛盾. 因此

$$(I - \pi_{A(\theta)})(y_1) = k_1 = k_2 = (I - \pi_{A(\theta)})(y_2).$$

于是由 $\pi_M(\theta)$ 的齐性, 知 T 为单值齐性算子.

由 S_A 与 T 的定义, 有

$$\begin{aligned} S_A &= \{\{g, (I - \pi_{A(\theta)})(y)\} \mid \{g, y\} \in A\} \\ &= \{\{g, T(g)\} \mid g \in D(A)\} = \text{graph}(T), \end{aligned}$$

故 S_M 为单值齐性算子 T 的图像.

(ii) 对任意 $\{g, y\} \in A$, 即 $y \in A(g)$. 由推论 1.2.11, y 有唯一分解:

$$y = \pi_{A(\theta)}(y) + y_2, \quad y_2 \in F_Y^{-1}(A(\theta)^{\perp}),$$

即 $y_2 = (I - \pi_{A(\theta)})(y)$. 于是

$$\begin{aligned} \{g, y\} &= \{g, y_2\} + \{\theta, \pi_{A(\theta)}(y)\} \\ &= \{g, (I - \pi_{A(\theta)})(y)\} + \{\theta, k\}, \end{aligned}$$

其中 $k = \pi_{A(\theta)}(y) \in A(\theta)$. 注意到 $\{g, (I - \pi_{A(\theta)})(y)\} \in S_A$, $\{\theta, k\} \in \{\theta\} \times A(\theta)$, 从而由 $S_A \cap (\{\theta\} \times A(\theta)) = \{\theta\}$, 知

$$A = S_A \dot{+} (\{\theta\} \times A(\theta)). \qquad \square$$

定义 5.2.2 设 X, Y 为 Banach 空间, $A \subset X \times Y$ 为线性子空间, $N(A)$ 与 $R(A)$ 分别为 X 与 Y 中的 Chebyshev 子空间. A 的度量广义逆 $A^{\#}$ 定义为

$$A^{\#} = \{\{y, (I - \pi_{N(A)})(g)\} \mid \{g, y\} \in X \times Y \text{且} \ \{g, \pi_{R(A)}(y)\} \in A\}.$$

注记 2 $A^{\#} = (\text{graph}(I - \pi_{N(A)}) A^{-1}(\text{graph}(\pi_{R(A)}))$, 其中 $A^{-1} = \{\{y, x\} \mid \{x, y\} \in A\}$.

注记 3 如果 X 与 Y 为 Hilbert 空间, 则 A 的度量广义逆 $A^{\#}$ 恰为 A 的正交广义逆 (见 [LN2]).

定理 5.2.2 设 X, Y 为 Banach 空间, A 为从 X 到 Y 的多值线性算子, $N(A)$, $R(A)$ 及 $A^{\#}$ 如定义 5.2.2, 则

(i) $A^{\#} = S_{A^{-1}} \dot{+} (F_Y^{-1}(R(A)^{\perp}) \times \{\theta\})$,

(ii) $D(A^{\#}) = R(A)\dot{+}F_Y^{-1}(R(A)^{\perp})$,

(iii) $R(A^{\#}) = D(A) \cap F_X^{-1}(N(A)^{\perp})$,

其中 $S_{A^{-1}} = \{\{y, (I - \pi_{N(A)})(g)\} : \{g, y\} \in A\}$.

证明 (i) 对任意 $\{y, x\} \in A^{\#}$, 由定义 5.2.2, 存在 $g \in D(A)$ 满足:

$$x = (I - \pi_{N(A)})(g) \text{ 且 } \{g, \pi_{R(A)}(y)\} \in A.$$

由推论 1.2.11, y 有唯一分解

$$y = \pi_{R(A)}(y) + y_2,\ y_2 \in F_Y^{-1}(R(A)^{\perp}).$$

于是

$$\begin{aligned}\{y, x\} &= \{y, (I - \pi_{N(A)})(g)\} \\ &= \{\pi_{R(A)}(y) + y_2, (I - \pi_{N(A)})(g)\} \\ &= \{\pi_{R(A)}(y), (I - \pi_{N(A)})(g)\} + \{y_2, \theta\}.\end{aligned}$$

因为 $\{g, \pi_{R(A)}(y)\} \in A$, 由度量算子部分 $S_{A^{-1}}$ 的定义,有 $\{\pi_{R(A)}(y), (I-\pi_{N(A)})(g)\} \in S_{A^{-1}}$, 因而

$$\{y, x\} \in S_{A^{-1}}\dot{+}(F_Y^{-1}(R(A)^{\perp}) \times \{\theta\}),$$

即

$$A^{\#} \subset S_{A^{-1}}\dot{+}(F_Y^{-1}(R(A)^{\perp}) \times \{\theta\}).$$

另一方面, 对任意 $\{y, x\} \in S_{A^{-1}}\dot{+}(F_Y^{-1}(R(A)^{\perp}) \times \{\theta\})$, 由 $S_{A^{-1}}$ 的定义, 存在 $\{g, y_1\} \in A$ 及 $y_2 \in F_Y^{-1}(R(A)^{\perp})$ 使得 $\{y_1, (I - \pi_{N(A)})(g)\} \in S_{A^{-1}}$ 且

$$y = y_1 + y_2,\quad x = (I - \pi_{N(A)})(g) + \theta = (I - \pi_{N(A)})(g).$$

于是, 注意到 $y_1 \in R(A)$, 由定理 1.2.11,

$$\pi_{R(A)}(y) = y_1 + \pi_{R(A)}(y_2) = y_1,$$

从而

$$\{g, \pi_{R(A)}(y)\} = \{g, y_1\} \in A.$$

因此

$$\{y, x\} = \{y, (I - \pi_{N(A)})(g)\} \in A^{\#},$$

得到

$$A^{\#} = S_{A^{-1}}\dot{+}(F_Y^{-1}(R(A)^{\perp}) \times \{\theta\}).$$

(ii) 由推论 1.2.11 及 $R(A)$ 为 Y 中 Chebyshev 子空间, 知

$$D(A^{\#}) = Y = R(A)\dot{+}F_Y^{-1}(R(A)^{\perp}).$$

(iii) 对任意 $g \in D(A) \cap F_X^{-1}(N(A)^{\perp})$, 由 $D(A)$ 的定义, 存在 $y \in Y$, 使得 $\{g, y\} \in A$.

由推论 1.2.11, g 有唯一分解:

$$g = \pi_{N(A)}(g) + g_2, \quad g_2 \in F_X^{-1}(N(A)^\perp).$$

另一方面，又有

$$g = \theta + g, \quad \theta \in N(A), \ g \in F_X^{-1}(N(A)^\perp).$$

由于 $N(A)$ 为 Chebyshev 子空间，故有 $\pi_{N(A)}(g) = \theta$, 从而

$$\{y, g\} = \{y, (I - \pi_{N(A)})(g)\} \in S_{A^{-1}}.$$

对任意 $y' \in F_Y^{-1}(R(A)^\perp)$, 由 (i), 得

$$\{y, g\} + \{y', \theta\} \in S_{A^{-1}} \dot{+} (F_Y^{-1}(R(A)^\perp) \times \{\theta\}) = A^\#.$$

取 $\widehat{y} = y + y' \in Y$, 有

$$\{\widehat{y}, g\} = \{y, g\} + \{y', \theta\} \in A^\#,$$

因此， $g \in R(A^\#)$, 于是

$$D(A) \cap F_X^{-1}(N(A)^\perp) \subset R(A^\#). \tag{5.2.4A}$$

另一方面，由定义 5.2.2, 有

$$R(A^\#) \subset \{(I - \pi_{N(A)})(g) | \ g \in D(A)\}.$$

对任意 $g \in D(A)$, 由推论 1.2.11,g 有唯一分解式

$$g = \pi_{N(A)}(g) + g_2, \quad g_2 \in F_X^{-1}(N(A)^\perp).$$

由 $D(A)$ 的线性，有

$$(I - \pi_{N(A)})(g) = g - \pi_{N(A)}(g) \in D(A),$$

于是

$$(I - \pi_{N(A)})(g) = g_2 \in D(A) \cap F_X^{-1}(N(A)^\perp),$$

从而，得

$$R(A^\#) \subset D(A) \cap F_X^{-1}(N(A)^\perp). \tag{5.2.4B}$$

综合 (5.2.4A), (5.2.4B), 得

$$R(A^\#) = D(A) \cap F_X^{-1}(N(A)^\perp).$$

□

推论 5.2.3　设 X, Y 为自反、严格凸 Banach 空间， T 为从 X 到 Y 的具有闭值域的稠定闭线性算子，则存在齐性算子 $T^M : Y \to D(T)$ 满足:

(i) $TT^MT = T$,

(ii) $T^MTT^M = T^M$,

(iii) $T^MT = I - \pi_{N(T)}$,

(iv) $TT^M = \pi_{R(T)}$,

使得 $T^\# = \text{graph}(T^M)$.

证明 由定义，存在 $\pi_{N(T)}$ 与 $\pi_{R(T)}$, 而且

$$T^\# = \{y, (I - \pi_{N(T)})(g)\} \mid \{g, y\} \in X \times Y \text{且} \ \pi_{R(T)}(y) = T(g)\},$$

于是，对任意 $y \in Y$, 唯一存在 $T^\#(y)$, 满足

$$T^\#(y) = (I - \pi_{N(T)})T^{-1}\pi_{R(T)}(y).$$

定义 T^M 为

$$T^M(y) = T^\#(y), y \in Y,$$

易知 T^M 满足 (i)~(iv) 且

$$T^\# = \text{graph}(T^M).$$

□

定理 5.2.4 设 X, Y 为 Banach 空间， $A \subset X \times Y$ 为线性子空间， $N(A)$ 与 $R(A)$ 分别为 X, Y 中的 Chebyshev 子空间，则

(i) $AA^\# = \{\{x, \pi_{R(A)}(x) + s\} | s \in A(\theta), x \in D(A^\#)\}$,

(ii) $A^\# A = \{\{x, (I - \pi_{N(A)})(x)\} | x \in D(A)\}$.

证明 (i) 对任意 $\{x, y\} \in AA^\#$, 由定义，存在 $z \in D(A)$, 满足

$$\{x, z\} \in A^\# \ \text{且} \ \{z, y\} \in A. \tag{5.2.5}$$

再由 $A^\#$ 的定义，知 $x \in D(A^\#)$, 且存在 $g \in D(A)$ 满足

$$z = (I - \pi_{N(A)})(g) \ \text{且} \ \{g, \pi_{R(A)}(x)\} \in A. \tag{5.2.6}$$

将 (5.2.6) 与 (5.2.5) 中第二式结合，得

$$\{(I - \pi_{N(A)})(g), y\} \in A. \tag{5.2.7}$$

注意到 $\{\pi_{N(A)}(g), \theta\} \in A$, 由 (5.2.6) 及 (5.2.7) 得

$$\begin{aligned}&\{\theta, y - \pi_{R(A)}(x)\}\\ &= \{g - \pi_{N(A)}(g), y\} + \{\pi_{N(A)}(g), \theta\} - \{g, \pi_{R(A)}(x)\} \in A.\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

令 $s = y - \pi_{R(A)}(x)$, 由 (5.2.8), 有 $s \in A(\theta)$ 使得

$$\{x, y\} = \{x, \pi_{R(A)}(x) + s\}. \tag{5.2.9}$$

反之，对任意 $\{x, y\} = \{\{x, \pi_{R(A)}(x) + s\} | s \in A(\theta), \ x \in D(A^\#)\}$. 从而 $x \in D(A^\#)$, 且存在 $s \in A(\theta)$,

$$y = \pi_{R(A)}(x) + s.$$

$x \in D(A^\#)$ 蕴涵存在 $z \in X$ 使得 $\{x, z\} \in A^\#$. 由 $A^\#$ 的定义，存在 $g \in D(A)$ 满足

$$\{g, \pi_{R(A)}(x)\} \in A \text{ 且 } z = (I - \pi_{N(A)})(g). \tag{5.2.10}$$

于是

$$\{x, (I - \pi_{N(A)})(g)\} \in A^{\#}. \tag{5.2.11}$$

注意到 $\{\theta, s\} \in A$, $\{\pi_{N(A)}(g), \theta\} \in A$, 由 A 的线性，得

$$\begin{aligned}&\{(I - \pi_{N(A)})(g), \pi_{R(A)}(x) + s\}\\&= \{\theta, s\} + \{g, \pi_{R(A)}(x)\} - \{\pi_{N(A)}(g), \theta\} \in A.\end{aligned} \tag{5.2.12}$$

结合 (5.2.11) 和 (5.2.12), 由 $AA^{\#}$ 的定义，有

$$\{x, y\} = \{x, \pi_{R(A)}(x) + s\} \in AA^{\#}. \tag{5.2.13}$$

结合 (5.2.9) 和 (5.2.13) 得

$$AA^{\#} = \{\{x, \pi_{R(A)}(x) + s\}: \ s \in A(\theta), x \in D(A^{\#})\},$$

即 (i) 成立.

(ii) 对任意 $\{x, y\} \in A^{\#}A$, 则 $x \in D(A)$, 且存在 $z \in D(A^{\#})$ 满足

$$\{x, z\} \in A \text{ 且 } \{z, y\} \in A^{\#}.$$

进而，由 $A^{\#}$ 的定义，存在 $g \in D(A)$, 满足

$$\{g, \pi_{R(A)}(z)\} \in A \text{ 且 } y = (I - \pi_{N(A)})(g).$$

如果能证

$$(I - \pi_{N(A)})(g) = (I - \pi_{N(A)})(x), \tag{5.2.14}$$

则有

$$\{x, y\} \in \{\{x, (I - \pi_{N(A)})(x)\}: \ x \in D(A)\},$$

即

$$A^{\#}A \subset \{\{x, (I - \pi_{N(A)})(x)\}: \ x \in D(A)\}. \tag{5.2.15}$$

下证 (5.2.14) 式成立.

因为 $\{x, z\} \in A$ 且 $\{g, \pi_{R(A)}(z)\} \in A$, 由 A 的线性，有

$$\{x - g, z - \pi_{R(A)}(z)\} \in A, \tag{5.2.16}$$

从而

$$z - \pi_{R(A)}(z) \in A(x - g) \subset R(A).$$

由 $\pi_{R(A)}$ 的拟可加性及幂等性，得

$$z - \pi_{R(A)}(z) = \pi_{R(A)}(z - \pi_{R(A)}(z)) = \theta. \tag{5.2.17}$$

由 (5.2.16) 及 (5.2.17), 得 $\{x-g,\theta\}\in A$, 从而

$$x-g\in N(A).$$

另一方面，应用推论 1.2.11, 有

$$x=\pi_{N(A)}(x)+x_1,$$

$$g=\pi_{N(A)}(g)+g_1,$$

其中 $x_1,g_1\in F_X^{-1}(N(A)^{\perp})\cap D(A)$, 从而 $x_1-g_1\in N(A)$.

假如 $x_1\neq g_1$, 则 $x_1-g_1\neq\theta$, 且 $\theta\in N(A)$. 有

$$x_1=\theta+x_1=(x_1-g_1)+g_1. \tag{5.2.18}$$

因为 $N(A)$ 为 Chebyshev 子空间，由推论 1.2.11, 有

$$D(A)=N(A)\dot{+}(F_X^{-1}(N(A)^{\perp})\cap D(A)).$$

这与 (5.2.18) 矛盾，因此 $x_1=g_1$, 即 (5.2.14) 成立.

反之，对任意 $\{x,y\}\in\{\{x,(I-\pi_{N(A)})(x)\}|\ x\in D(A)\}$, 我们有 $x\in D(A)$ 且 $y=(I-\pi_{N(A)})(x)$. 由 $x\in D(A)$, 存在 $z\in Y$ 满足 $z\in A(x)\subset R(A)$, 于是 $\{x,\pi_{R(A)}(z)\}=\{x,z\}\in A$. 再由 $A^{\#}$ 的定义，有

$$\{z,(I-\pi_{N(A)})(x)\}\in A^{\#}.$$

换言之， $\{z,y\}\in A^{\#}$. 注意到 $\{x,z\}\in A$, 有 $\{x,y\}\in A^{\#}A$. 即

$$\{\{x,(I-\pi_{N(A)})(x)\}|\ x\in D(A)\}\subset A^{\#}A. \tag{5.1.19}$$

综合 (5.2.15) 与 (5.2.19), 有

$$A^{\#}A=\{\{x,(I-\pi_{N(A)})(x)\}|\ x\in D(A)\}.$$ □

定义 5.2.3 设 X,Y 为 Banach 空间， $A\subset X\times Y$ 为线性子空间， $R(A)$ 在 Y 中为闭子空间. $y\in Y,u\in X$ 称为线性包含 $y\in A(x)$ 的极值解，是指

(i) $u\in D(A)$,

(ii) 存在 $z\in A(u)$ 满足:

$$d(y,R(A))=\|y-z\|,$$

这里 $d(y,R(A))=\inf_{z\in R(A)}\|y-z\|$. $y\in A(x)$ 的最小范数的极值解，称为 $y\in A(x)$ 的最佳逼近解.

当 X,Y 为 Hilbert 空间时，极值解又叫最小二乘解.

定理 5.2.5 设 X,Y 为 Banach 空间， $A\subset X\times Y$ 为线性子空间， $N(A)$ 与 $R(A)$ 分别为 X 与 Y 中的 Chebyshev 子空间， $y\in Y\backslash R(A)$, 则下述命题等价:

(i) $u \in X$ 为线性包含 $y \in A(x)$ 的极值解;

(ii) $u \in D(A)$ 且 $\pi_{R(A)}(y) \in A(u)$;

(iii) $u \in D(A)$ 且 $y \in A(u)\dot{+}F_Y^{-1}(R(A)^{\perp})$, 其中 F_Y 为 Y 的对偶映射.

证明 (i)⇒(ii). 若 $u \in X$ 为 $y \in A(x)$ 的极值解, 由定义 5.2.3,$u \in D(A)$ 且存在 $z \in A(u)$ 满足

$$d(y, R(A)) = \|y - z\|.$$

因为 $z \in R(A)$, 且 $R(A)$ 为 Chebyshev 子空间, 则 $z = \pi_{R(A)}(y)$, 于是

$$\pi_{R(A)}(y) \in A(u).$$

(ii)⇒(iii). 如果 $u \in D(A)$ 且 $\pi_{R(A)}(y) \in A(u)$, 对 $y \in Y \backslash R(A)$, 应用推论 1.2.11, 有

$$y = \pi_{R(A)}(y) + y_1, \quad y_1 \in F_Y^{-1}(R(A)^{\perp}),$$

于是

$$y \in A(u)\dot{+}F_Y^{-1}(R(A)^{\perp}).$$

(iii)⇒ (i). 如果 $u \in D(A)$ 且 $y \in A(u)\dot{+}F_Y^{-1}(R(A)^{\perp})$, 则 $A(u) \neq \varnothing$, 且存在 $z \in A(u)$ 及 $y_1 \in F_Y^{-1}(R(A)^{\perp})$, 满足 $y = z + y_1$, 于是

$$y - z = y_1 \in F_Y^{-1}(R(A)^{\perp}).$$

因此

$$F_Y(y - z) \cap R(A)^{\perp} \neq \varnothing.$$

应用定理 1.2.9 中 (2), 并注意到 $R(M)$ 为 Chebyshev 子空间, 则 $z = \pi_{R(A)}(y)$, 于是 $z \in A(u)$ 且

$$\|y - z\| = \|y - \pi_{R(A)}(y)\| = d(y, R(A)),$$

由定义 5.2.3,u 为 $y \in A(x)$ 的极值解. □

定理 5.2.6 设 X, Y 为 Banach 空间, $A \subset X \times Y$ 为线性子空间, $N(A)$ 与 $R(A)$ 分别为 X, Y 中的闭子空间. 则

(i) 设 K 为 A^{-1} 的任意代数算子部分, 则 $u \in X$ 为 $y \in A(x)$ 的极值解当且仅当

$$u \in K(\pi_{R(A)}(y))\dot{+}N(A). \tag{5.2.20}$$

(ii) 设 $A^{\#}$ 为 A 的度量广义逆, 则 $u \in X$ 为 $y \in A(x)$ 的极值解当且仅当

$$u \in A^{\#}(y)\dot{+}N(A). \tag{5.2.21}$$

(iii) 如果 $y \in R(A)$, 则 $u \in X$ 为 $y \in A(x)$ 的解当且仅当

$$u \in A^{\#}(y)\dot{+}N(A). \tag{5.2.22}$$

(iv) $u = A^{\#}(y)$ 为 $y \in A(x)$ 的最佳逼近解.

(v) 进一步，设 $A(\theta)$ 为 Chebyshev 的，则

$$d(y,R(A)) = \|y - S_A(A^{\#}(y)) - \pi_{A(\theta)}[\pi_{R(A)}(y)]\|. \tag{5.2.23}$$

证明 (i) 由定理 5.2.5, $u\in X$ 为 $y\in A(x)$ 的极值解当且仅当

$$\{u,\pi_{R(A)}(y)\}\in A,$$

或

$$\{\pi_{R(A)}(y),u\}\in A^{-1}.$$

因为 K 为 A^{-1} 的代数算子部分，则

$$u = K(\pi_{R(A)}(y)) + k,\ \ k\in N(A),$$

于是

$$u\in K(\pi_{R(A)}(y))\dot{+}N(A). \tag{5.2.24}$$

另一方面，如果 (5.2.24) 为真，则存在 $k\in N(A)=A^{-1}(\theta)$ 使得

$$u = K(\pi_{R(A)}(y)) + k, \tag{5.2.25}$$

由 K 的定义，有

$$\{\pi_{R(A)}(y),K(\pi_{R(A)}(y))\}\in A^{-1}.$$

再由 $\{\theta,k\}\in A^{-1}$ 及 A^{-1} 的线性，得

$$\{\pi_{R(A)}(y),u\} = \{\pi_{R(A)}(y),K(\pi_{R(A)}(y))\} + \{\theta,k\}\in A^{-1}.$$

因此 $\pi_{R(A)}(y)\in A(u)$, 故 u 为 $y\in A(x)$ 的极值解.

(ii) 在 (i) 中取 K 为 A^{-1} 的度量算子部分， $u\in X$ 为 $y\in A(x)$ 的极值解当且仅当

$$u\in S_{A^{-1}}(\pi_{R(A)}(y))\dot{+}N(A). \tag{5.2.26}$$

对 $y\in Y\backslash R(A)$, 由推论 1.2.11, 有

$$y = \pi_{R(A)}(y) + k,\ \ \ k\in F_Y^{-1}(R(A)^{\perp}).$$

由定理 5.2.2, 有

$$A^{\#} = S_{A^{-1}}\dot{+}(F_Y^{-1}(R(A)^{\perp})\times\{\theta\}),$$

于是

$$A^{\#}(y) = S_{A^{-1}}(\pi_{R(A)}(y)).$$

因此 (5.2.26) 为真当且仅当 $u\in A^{\#}(y)\dot{+}N(A)$.

(iii) 由 (ii) 立得.

(iv) 因为 $u=A^{\#}(y)\in A^{\#}(y)\dot{+}N(A)$, 由 (ii) 知， u 为 $y\in A(x)$ 的极值解.

对于 $y\in A(x)$ 的任一极值解 w, 由 (ii), 有 $k\in N(A)$ 使

$$w = A^{\#}(y) + k. \tag{5.2.26$'$}$$

由定理 5.2.2, 知 $A^{\#}(y) \in R(A^{\#}) = D(A) \cap F_X^{-1}(N(A)^{\perp})$.

另一方面，对上面的 w, 由推论 1.2.11,w 有唯一分解

$$w = \pi_{N(A)}(w) + k_1, \quad k_1 \in F_X^{-1}(N(A)^{\perp}). \tag{5.2.27}$$

由 (5.2.26)′、(5.2.27) 及分解式的唯一性，得

$$k_1 = A^{\#}(y),$$

从而

$$w = A^{\#}(y) + \pi_{N(A)}(w),$$

由定理 1.2.11, 有

$$\|A^{\#}(y)\| = \|w - \pi_{N(A)}(w)\| \leqslant \|w\|.$$

故 $u = A^{\#}(y)$ 为 $y \in A(x)$ 的最佳逼近解.

(v) 由 (iv) $u = A^{\#}(y)$ 为 $y \in A(x)$ 的最佳逼近解. 由极值解的定义，存在 $s \in A(A^{\#}(y))$ 满足：

$$d(y, R(A)) = \|y - s\|. \tag{5.2.28}$$

因为 $R(A)$ 与 $A(\theta)$ 均为 Chebyshev 子空间，则

$$s = \pi_{R(A)}(y). \tag{5.2.29}$$

注意到 $\{A^{\#}(y), s\} \in A$, 由 A 的度量算子部分 S_A 的定义，有

$$\{A^{\#}(y), (I - \pi_{A(\theta)})(s)\} \in S_A.$$

换言之，我们有

$$S_A(A^{\#}(y)) = (I - \pi_{A(\theta)})(s).$$

于是，结合 (5.2.29), 得

$$s = S_A(A^{\#}(y)) + \pi_{A(\theta)}(\pi_{R(A)}(y)).$$

再由 (5.2.28), 得

$$d(y, R(A)) = \|y - S_A(A^{\#}(y)) - \pi_{A(\theta)}(\pi_{R(A)}(y))\|. \qquad \square$$

推论 5.2.7 设 X、Y 为 Banach 空间， $A \subset X \times Y$ 为线性子空间， $N(A)$ 与 $R(A)$ 分别为 X 与 Y 中的 Chebyshev 子空间， $y \in Y \backslash R(A)$, 则下述命题等价

(i) $y \in A(x)$ 有极值解；

(ii) $\pi_{R(A)}(y) \in R(A)$;

(iii) $y \in R(A) \dotplus F_Y^{-1}(R(A)^{\perp})$.

证明 (i)⇒(ii). 设 $y \in A(x)$ 有极值解 u, 由定理 5.2.5, 知 $u \in D(A)$, 且 $\pi_{R(A)}(y) \in A(u)$, 从而 $\pi_{R(A)}(y) \in R(A)$.

(ii)⇒(iii). 设 $\pi_{R(A)}(y) \in R(A)$, 由 $R(A)$ 的定义，存在 $u \in D(A)$, 使 $\pi_{R(A)}(y) \in A(u)$. 由定理 5.2.5 中 (ii)⇔ (iii), 知 $y \in A(u)\dot{+}F_Y^{-1}(R(A)^{\perp})$, 于是

$$y \in R(A)\dot{+}F_Y^{-1}(R(A)^{\perp}).$$

(iii)⇒(i). 设 (iii) 为真，则 y 有唯一分解，

$$y = y_1 + y_2, \tag{5.2.30}$$

其中 $y_1 \in R(A), y_2 \in F_Y^{-1}(R(A)^{\perp})$.

由 $R(A)$ 的定义，存在 $u \in D(A)$, 使

$$y_1 \in A(u). \tag{5.2.31}$$

由 (5.2.30), $y - y_1 \in F_Y^{-1}(R(A)^{\perp})$, 从而

$$F_Y(y - y_1) \cap R(A)^{\perp} \neq \varnothing.$$

应用定理 1.2.9 中 (2), 并注意到 $R(A)$ 为 Y 中 Chebyshev 子空间，故 $y_1 = \pi_{R(A)}(y)$. 再由 (5.2.31), 得 $u \in D(A)$, 且 $\pi_{R(A)} \in A(u)$. 应用定理 5.2.5, 知 u 为 $y \in A(x)$ 的极值解. □

§5.3 Hilbert 空间中线性包含的约束最小化问题

设 H_1、 H_2 为 Hilbert 空间， $A \subset H_1 \times H_2$ 为线性子空间. 如果 $M \subset H_1$, 则

$$A|_M = \{\{x, y\} : \{x, y\} \in A \;\; 且 \;\; x \in M\}$$

称为 A 在 M 上的限制. 设 $A^{\perp}$ 为 A 在 $H_1 \times H_2$ 中的正交补，则 A 的共轭子空间 A^* 定义为

$$A^* := \{\{x, y\} \in H_2 \times H_1 \;\; | \; \{-y, x\} \in A^{\perp}\},$$

由定义可知 $(AB)^* \subset B^*A^*$, 如果 $D(A^*)$ 或 $R(B^*)$ 为整个空间，则 $(AB)^* = B^*A^*$ 设 A、 $C \subset H_1 \times H_2$, 则 $(A\dot{+}C)^* = A^* \cap C^*$.

设 $A \subset H_1 \times H_2$ 为线性子空间， P 为 H_2 到 $A(\theta)$ 上线性投影算子，记 $A_{S,P} = \operatorname{graph}(I - P)A$, 则 $A_{S,P}$ 为 A 的代数算子部分.

定义 5.3.1 设 A 为 $H_1 \times H_2$ 中的线性子空间， $M \subset H_1, g \in H_2$. $u \in H_1$ 称为线性包含 $g \in A(x)$ 关于 M 的限制最小二乘解，是指:

(i) $u \in D(A) \cap M$,

(ii) 存在 $t \in A(u)$, 满足

$$\|g-t\| = d(g, R(A|_M)).$$

我们讨论限制于超平面的线性包含的最小二乘问题.

定理 5.3.1 设 H_1、H_2 为 Hilbert 空间, $L \subset H_1 \times H_2, N \subset H_1$. 又设 P 为 H_2 到 $L(\theta)$ 上的线性投影, $L_{S,P}$ 为 L 的对应于 P 的任一固定代数算子部分. 又设

$$S := g \dot{+} N \quad 且 \quad A := L|_N,$$

其中 $g \in D(L)$, 则对固定的 $h \in H_2$, 下述命题等价:

(i) w 为线性包含 $h \in L(x)$ 关于 S 的限制最小二乘解;

(ii) $k := g - w$ 为

$$L_{S,P}(g) - h \in A(x)$$

的最小二乘解;

(iii) $w \in S \cap D(L)$, 且

$$L_{S,P}(w) - h \in L(\theta) \dot{+} N(A^*);$$

(iv) $w \in S \cap D(L)$, 且存在 $z \in L(\theta)$ 满足: $\forall k \in L(\theta), u \in D(L) \cap N$, 有

$$\langle L_{S,P}(w) - h - z, L_{S,P}(u) + k \rangle = 0.$$

证明 由定义, $w \in H_1$ 为 $h \in L(x)$ 关于 S 的限制最小二乘解当且仅当存在 $t \in H_2$ 满足

$$t \in L|_S(w), \tag{5.3.1}$$

且

$$\|h - t\| = d(h, R(L|_S). \tag{5.3.2}$$

下面刻画 (5.3.1) 及 (5.3.2) 式.

(5.3.1) 为真当且仅当 $w \in S$ 且 $\{w, t\} \in L$. 等价地, 存在 $k \in N$, 使 $w = g - k \in D(L)$, 且存在 $z \in L(\theta)$ 使 $t = L_{S,P}(w) + z$. 因为 $g \in D(L), w \in D(L)$, 故 $k \in D(L)$. 因此, (5.3.1) 成立, 当且仅当存在 $k \in N \cap D(L), z \in L(\theta)$, 满足 $w = g - k$ 且

$$t = L_{S,P}(g) - L_{S,P}(k) + z.$$

再刻画 (5.3.2). 首先注意到

$$\|h - t\| = \|L_{S,P}(g) - h - L_{S,P}(k) + z\| \tag{5.3.3}$$

与

$$\begin{aligned}
& d(h, R(L|_S)) \\
= & \inf\{\|s - h\| : \ s \in L(u), \ u \in S \cap D(L)\} \\
= & \inf\{\|L_{S,P}(g) - h - L_{S,P}(k) + p\| : \ k \in D(L) \cap N, p \in L(\theta)\}
\end{aligned}$$

$$= d(L_{S,P}(g) - h, R(A)). \tag{5.3.4}$$

注意到，由 $t \in A(w)$, 有

$$L_{S,P}(k) - z = L_{S,P}(g) - t,$$

$$A(g - w) = A(k),$$

从而

$$L_{S,P}(k) - z \in A(k).$$

于是由 (5.3.3), (5.3.4), 知 (5.3.2) 成立当且仅当 k 为

$$L_{S,P}(g) - h \in A(x)$$

的最小二乘解.

由 (5.3.3) 及 (5.3.4) 可知： $w \in H_1$ 为 $h \in L(x)$ 关于 S 的限制最小二乘解当且仅当存在 $k \in D(L) \cap N$ 使得 $w = g - k$, 且 k 为 $L_{S,P}(g) - h \in M(x)$ 的最小二乘解. 因此 (i) 与 (ii) 等价.

假定 (ii) 成立，即 $k := g - w$ 为

$$L_{S,P}(g) - h \in A(x)$$

的最小二乘解. 由定理 5.2.5 中 (i)⇔(iii) 并注意若令 $H_2^* = H_2$, 则 $F_{H_2} = I_{H_2}$. 另一方面 $R(A)^\perp = N(A^*)$, 从而

$$L_{S,P}(g) - h \in A(k) \dot{+} N(A^*). \tag{5.3.5}$$

记

$$L_{S,P}(g) - h = x + y,$$

其中 $x \in A(k), y \in N(A^*)$. 则由 A 的定义， $k \in N$ 且 $\{k, x\} \in L$. 因此，存在 $t \in L(\theta)$ 使 $x = L_{S,P}(k) + t$. 于是

$$\begin{aligned} L_{S,P}(w) - h &= L_{S,P}(g) - L_{S,P}(k) - h \\ &= -L_{S,P}(k) + x + y \\ &= L_{S,P}(k) - L_{S,P}(k) + t + y \\ &= t + y \in L(\theta) \dot{+} N(A^*), \end{aligned}$$

因此 (ii)⇒(iii).

现假定 (iii) 为真. 要证：存在 $k \in D(M)$, 使得 (5.3.5) 成立，即

$$L_{S,P}(g) - h \in A(k) \dot{+} N(A^*).$$

因此， k 为 $L_{S,P}(g) - h \in A(k)$ 的最小二乘解，即 (iii)⇒(ii).

由 (iii), $w \in S \cap D(L), w = g - k$, 其中 $k \in D(L) \cap N = D(A)$. 记

$$L_{S,P}(w)-h=t+y,\ \ t\in L(\theta)\text{且}\ \ y\in N(A^*),$$

则由于 $t+L_{S,P}(k)\in A(k)$, 有

$$\begin{aligned}L_{S,P}(g)-h=&L_{S,P}(w)+L_{S,P}(k)-h\\=&t+L_{S,P}(k)+y\in A(k)+N(A^*).\end{aligned}$$

因此 (5.3.5) 为真，故 (ii)⇔(iii).

最后证 (iii)⇔(iv)

定义 $U\subset H_1\times H_2$ 为

$$U=\{\{u,L_{S,P}(u)\}\ :u\in D(A)\}.$$

记 $L_\infty=\{\theta\}\times L(\theta)$ 为 L 的无限部分，则

$$A=U\dot{+}L_\infty,\ \ A(\theta)=L(\theta).$$

因此 (iii) 成立，当且仅当 $w\in S\cap D(L)$, 且存在 $z\in L(\theta)$ 使得

$$L_{S,P}(w)-h-z\in N(A^*)=N((U\dot{+}L_\infty)^*),$$

即

$$\{L_{S,P}(w)-h-z,\theta\}\in(U\dot{+}L_\infty)^*.$$

而这等价于

$$\{\theta,L_{S,P}(w)-h-z\}\in(U\dot{+}L_\infty)^\perp.$$

又等价于： $\forall k\in L(\theta),u\in D(L)\cap N=D(A)$,

$$\langle L_{S,P}(w)-h-z,L_{S,P}(u)+k\rangle=0.$$ □

注记 1 设 $A=L|_N$ 如定理 5.3.1 所定义，则

$$\begin{aligned}R(A)&=L(\theta)\dot{+}(L(\theta)^\perp\cap L(N)),\\N(A)&=\{u\in N\cap D(L):L_{S,P}(u)\in L(\theta)\},\\N(A^*)&=\{x\in(L(\theta))^\perp:\ \langle x,L_{S,P}(u)\rangle=0,\ \ \forall u\in N\cap D(L)\}.\end{aligned}$$

注记 2 在定理 5.3.1 中，线性包含 $h\in L(x)$ 关于 S 的限制最小二乘解的特征 (iii) 是法线方程的广义形式，一般称

$$L_{S,P}(w)-h\in L(\theta)+N(A^*)$$

为线性包含 $h\in L(x)$ 的“法线包含”. 特别，当 L 为 H_1 到 H_2 的单值线性算子. 取 $g=\theta$, $N=H_1,A=L$, 则“法线包含”为 $A(w)-h\in N(A^*)$, 此即法线方程 $A^*A(w)=A^*(h)$.

定理 5.3.2 在定理 5.3.1 的假设下，则

(i) 线性包含 $h \in L(x)$ 关于 S 有限制最小二乘解当且仅当

$$L_{S,P}(g) - h \in R(A) \dot{+} N(A^*). \tag{5.3.6}$$

特别，如果 $R(A)$ 为闭的，则对任意 $h \in H_2, h \in L(x)$ 关于 S 一定有限制最小二乘解.

(ii) 假设 (5.3.6) 成立，且 $N(A)$ 为闭的，则 $h \in L(x)$ 关于 S 的限制最小二乘解的集合，记为 Ω_h，可表示为

$$\Omega_h = [g - A^{\#}(L_{S,P}(g) - h)] \dot{+} N(A), \tag{5.3.7}$$

这里 $A^{\#}$ 为多值线性算子 A 的正交广义逆.

(iii) 假定 (5.3.6) 成立，且 $N(A)$、 $A(\theta)$ 为闭的. 设 R 为 H_2 到 $N(A^*)$ 上的正交投影算子，而 Q 为 H_2 到 $A(\theta)$ 上的正交投影算子，则

$$d(h, R(L|_S)) = \|[I - A_{S,P}A^{\#} - Q(I - R)](L_{S,P}(g) - h)\|. \tag{5.3.8}$$

证明 (i) 由定理 5.3.1,$h \in L(x)$ 关于 S 有限制最小二乘解当且仅当

$$L_{S,P}(g) - h \in A(x)$$

具有最小二乘解. 应用推论 5.2.7 中 (i)⇔(iii), 并取 $F_{H_2} = I_{H_2}$, 注意到 $R(A)^{\perp} = N(A^*)$, 上式又等价于

$$L_{S,P}(g) - h \in R(A) \dot{+} N(A^*), \tag{5.3.9}$$

故 (i) 为真.

(ii) 由定理 5.3.1, 有

$$\Omega_h = \{g - k |\ k \text{ 为 } L_{S,P}(g) - h \in A(x) \text{的最小二乘解}\}. \tag{5.3.10}$$

因 $N(A)$ 为闭的，故 A 的正交广义逆 $A^{\#}$ 存在. 由定理 5.2.6 中 (ii), 知

$$L_{S,P}(g) - h \in A(x)$$

的最小二乘解的集合由下式给出：

$$A^{\#}(L_{S,P}(g) - h) \dot{+} N(A).$$

由此及 (5.3.10) 得 (5.3.7), 因此 (ii) 为真.

(iii) 由 (5.3.4), 有

$$d(h, R(L|_S)) = d(L_{S,P}(g) - h, R(A)).$$

由假设 $N(A)$、$A(\theta)$ 为闭子空间，从而均为 Chebyshev 子空间. 由定理 5.2.6 中 (v), 有

$$\begin{aligned} d(h, R(L|_S)) &= d(L_{S,P}(g) - h, R(A)) \\ &= \|L_{S,P}(g) - h - S_A A^{\#}(L_{S,P}(g) - h) \\ &\quad - \pi_{A(\theta)}[\pi_{R(A)}(L_{S,P}(g) - h)]\| \\ &= \|[I - A_{S,Q}A^{\#} - Q(I - R)](L_{S,P}(g) - h)\|, \end{aligned}$$

其中 $S_A = A_{S,Q}$ 为 A 的正交算子部分， $Q = \pi_{A(\theta)}, \pi_{R(A)} = I - R$. □

设 $M \subset H_1 \times H_2$ 为线性子空间，且 $N(M)$ 闭， $L : H_1 \to H_2$ 为线性算子. 在 $y \in M(x)$ 的所有最小二乘解中求 $L(x) = h$ 的最小二乘解的问题可归纳为定理 5.3.1, 定理 5.3.2 的情形. 设 $N := N(M)$, $g := M^{\#}(y)$, 则有以下的结果.

推论 5.3.3 设 H_1, H_2 与 H_3 为 Hilbert 空间， $M \subset H_1 \times H_3$ 为线性子空间， $L \subset H_1 \times H_2$ 为单值线性算子的图像. 假定 $N(M)$ 为闭的. 设 $y \in R(M)\dot{+}R(M)^{\perp}, h \in H_2$. 定义

$$S := A^{\#}(y)\dot{+}N(M), A := L|_{N(M)}.$$

假定 $A^{\#}(y) \in D(L)$, 则有下述命题.

Ⅰ. 下述命题等价:

(i) w 为 $L(x) = h$ 关于 S 的限制最小二乘解;

(ii) $w = g - k$, 其中 $k \in N(M) \cap D(L)$ 为 $L(M^{\#}(y)) - h = A(x)$ 的最小二乘解;

(iii) $w \in S \cap D(L)$ 且 $L(w) - h \in N(A^*)$;

(iv) $w \in S \cap D(L)$ 且 $\forall u \in D(L) \cap N(M)$, 有

$$\langle L(w) - h, L(u)\rangle = 0.$$

Ⅱ. $L(x) = h$ 有关于 S 的限制最小二乘解当且仅当

$$L(M^{\#}(y)) - h \in R(A)\dot{+}R(A)^{\perp},$$

特别，如果 $R(M)$ 闭，则 $L(x) = h$ 总有关于 S 的限制最小二乘解.

Ⅲ. 假定 (5.3.6) 成立，且 $N(M) \cap N(L)$ 为闭的. 则 $L(x) = h$ 关于 S 的所有限制最小二乘解的集合为

$$\Omega_h = [M^{\#}(y) - A^{\#}(L(M^{\#}(y)) - h)] + N(L) \cap N(M).$$

Ⅳ. 假定 (5.3.6) 成立，且 $N(L) \cap N(M)$ 为闭的，则

$$d(h, R(L|_S)) = \|(I - AA^{\#})[L(M^{\#}(y)) - h]\|.$$ □

§5.4 一类奇异最优控制

本节讨论一类紧区间上的奇异最优控制问题，其最小化的消费泛函分为两项：一项为经典消费泛函，另一项涉及到具有无穷维值的多值算子. 其状态由常微方程

及一般算子边值条件支配. 由于边界条件的一般性, 一个特定的控制可产生无穷多响应, 因此, 这是一个奇异最优控制问题.

设 $U(t)$、 $W(t)$、 $A(t)$, 且 $B(t)$ 为 $m\times m$、 $n\times n$、 $n\times n$ 及 $n\times m$ 的复值矩阵, 且均在 $[a,b]$ 上关于 t 连续. 对于 $k\in N$, 设 $L_2^k:=L^2([a,b],\mathbb{C}^k)$, L_2^k 与 $\mathbb{C}^k$ 的内积均记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$:

$$\langle f,g\rangle:=\int_a^b\langle f(s),g(s)\rangle ds,\quad f,g\in L_2^k,$$

且

$$\langle\alpha,\beta\rangle:=\alpha'\bar{\beta},\quad \alpha,\beta\in\mathbb{C}^k,$$

其中 " α' " 为 α 的转置, " $\bar{\beta}$ " 为 β 的复共轭.

对于 $i=1,2$, 设 $F_i: L_2^m\times L_2^n\to\mathbb{C}^{d_i}$ 定义为

$$F_i(u,x):=\int_a^b[N_i^*(t)u(t)+M_i^*(t)x(t)]dt,$$

其中 $N_i(t)$、 $M_i(t)$ 为 $m\times d_i$、 $n\times d_i$ 的复值矩阵函数, 其列向量在 L_2^m 及 L_2^n 中.

设

$$J(u,x):=\int_a^b[\|U(t)u(t)\|^2+\|W(t)x(t)\|^2]dt+\|F_1(u,x)\|^2,$$
$$u\in L_2^m, x\in L_2^n,$$

其中 $\|\cdot\|$ 为欧氏范数.

设 $\gamma_2\in\mathbb{C}^{d_2}$ 为给定向量, 讨论如下问题: 求

$$\min_D J(u,x),$$

其中 $D=\{\{u,x\}: u,x \text{ 满足 (i),(ii),(iii)}\}$:

(i) $u\in L_2^m, x\in L_2^n$ 且在 $[a,b]$ 绝对连续,

(ii) $\dfrac{dx(t)}{dt}=A(t)x(t)+Bu(t),\quad a\leqslant t\leqslant b,$

(iii) $F_2(u,x)=\gamma_2$.

如果 $F_2(u,x)=Mx(a)+Nx(b)$, 其中 M,N 为常数矩阵, 且 $F_1\equiv 0$, 则上述问题为两点边值条件的经典最优控制问题.

D 可以为空集, 亦能为多值映射的图像. $\{u,x\}\in D$ 称为允许控制 - 响应对.

如果 $\{u^+,x^+\}\in D$, 且

$$J(u^+,x^+)=\min_{\{u,x\}\in D}J(u,x), \tag{5.4.1}$$

则称 $\{u^+,x^+\}\in D$ 为最优控制 - 响应对.

设 $\varphi(t)$ 为满足 $\varphi(a)=I_{n\times n}$ 的 $\dfrac{dx(t)}{dt}=A(t)x(t)$ 的基本解矩阵.

算子 H 定义为: $\forall u\in L_2^m$, 有

$$(Hu)(t)=\varphi(t)\int_a^t\varphi^{-1}(s)B(s)u(s)ds,\quad a\leqslant t\leqslant b.$$

$d_i\times n$ 矩阵 Q_i 定义为

$$Q_i=\int_a^b M_i^*(t)\varphi(t)dt,\quad i=1,2.$$

其中 $(*)$ 为转置共轭.

设

$$G:=\{u\in L_2^m:\ F_2(u,H(u))\in R(Q_2)\}.$$

现叙述本节的主要定理.

定理 5.4.1 允许控制-响应对 $\{u^+,x^+\}$ 为最优的，当且仅当存在两个绝对连续 $n\times 1$ 的向量函数 η 与 δ, 满足

(i) $\dot\eta=-A^*\eta-W^*Wx^+-M_1F_1(u^+,x^+),\quad \eta(b)=0;$

(ii) $\dot\delta=-A^*\delta-M_2,\quad \delta(b)=0;$

(iii) $\int_a^b\varphi^*W^*Wx^+dt+Q_1F_1(u^+,x^+)\in N(Q_2)^\perp;$

(iv) $U^*Uu^++B^*\eta+N_1F_1(u^+,x^+)-[N_2+B^*\delta]l\in(G)^\perp,$

其中 l 为 $n\times 1$ 常向量，且满足下述矩阵方程:

$$Q_2^*l=\int_a^b\varphi^*W^*Wx^+dt+Q_1F_1(u^+,x^+).$$

为证定理 5.4.1, 需引入一些概念，并需建立几个引理. 设

$$S(u,k)=F_2(u,H(u))+Q_2k,\quad u\in L_2^m,\ k\in\mathbb{C}^{d_2}.$$

应用常数变易法公式， $\{u,x\}\in D$ 当且仅当 $u\in L_2^m$, 且

$$x=H(u)+\varphi k,$$

其中 $k\in\mathbb{C}^{d_2}$ 使得 $S(u,k)=\gamma_2$. 特别， D 为非空集当且仅当 $\gamma_2\in R(S)$.

本节中，如无声明，均假定 $D\neq\varnothing$.

任取固定的 $\{u_0^+,k_0^+\}\in S^{-1}(\gamma_2)$, 则

$$S^{-1}(\gamma_2)=\{u_0^+,k_0^+\}\dot{+}N(S),$$

从而

$$D=\{\{u_0^++\hat u,\ H(u_0^++\hat u)+\varphi(k_0^++\hat k)\}|\{\hat u,\hat k\}\in N(S)\}.$$

因 $Q_2:\mathbb{C}^n\dot{\to}\mathbb{C}^{d_2}$ 为矩阵，设 $Q_2^\#$ 为 Q_2 的任一内逆. $S(\hat u,\hat k)=0$ 当且仅当 $\hat u\in G$, 且 $\hat k=-(Q_2^\#)F_2(\hat u,H(\hat u))+k_0$, 其中 $k_0\in N(Q)$, 由此导出

$$D=\{\{u_0^++\hat u,\ H(u_0^++\hat u)+\varphi[k_0^+-Q_2^\#F_2(\hat u,H(\hat u))+k_0]\}|\hat u\in G,k_0\in N(Q_2)\}.$$

在消费泛函 $J(u,x)$ 中，代入

$$u = u_0^+$$

与

$$x = H(u_0^+ + \hat{u}) + \varphi[k_0^+ + k_0 - Q_2^\# F_2(\hat{u}, H(\hat{u}))],$$

得下面引理.

引理 5.4.1 $\{u^+, x^+\}$ 为最优的，当且仅当存在 $\hat{u} \in G, \hat{k_0} \in N(Q_2)$ 使得

$$u^+ = u_0^+ + \hat{u},\ x^+ = H(u_0^+ + \hat{u}) + \varphi(k_0^+ + \hat{k}) - \varphi Q_2^\# F_2(\hat{u}, H(\hat{u})),$$

且 $\{\hat{u}, \hat{k}_0\}$ 满足

$$\|\xi + p(\hat{u}) + \{\theta, W\varphi\hat{k_0}, Q_1\hat{k_0}\}\| = \min_{\substack{u\in G \\ k\in N(Q_2)}} \|\xi + p(u) + \{\theta, W\varphi k, Q_1 k\}\|,$$

其中

$$\xi := \{Uu_0^+, W[H(u_0^+) + \varphi k_0^+], F_1(u_0^+, H(u_0^+)) + Q_1 k_0^+\},$$
$$p(u) := \{Uu, W[H(u) - \varphi Q_2^\# F_2(u, H(u))], F_1(u, H(u)) - Q_1 Q_2^\# F_2(u, H(u))\}.$$

现定义闭线性子空间 $M \subset L_2^m \times [L_2^m \times L_2^n \times \mathbb{C}^{d_1}]$ 为

$$M = \{u, p(u) + \{\theta, W\varphi k, Q_1 k\}\} | k \in N(Q_2), u \in G\}.$$

引理 5.4.1 可以用 M 改述为下述形式.

引理 5.4.2 (i) u^+ 为最优的，当且仅当 $u^+ = u_0^+ + \hat{u}$，其中 $\hat{u} \in G$ 为 $-\zeta \in M(u)$ 的最小二乘解.

(ii) $\{u^+, x^+\}$ 为最优的，当且仅当 $u^+ = u_0^+ + \hat{u}$，且 $\hat{x} = H(u_0^+ + \hat{u} + \varphi(k_0^+ + \hat{k}) - \varphi Q_2^\# F_2(\hat{u}, H(\hat{u}))$，其中 $\hat{u} \in G, \hat{k} \in N(Q_2)$ 满足

$$\zeta + p(\hat{u}) + \{\theta, W\varphi\hat{k}, Q_1\hat{k}\} \in (R(M))^\perp.$$

定理 5.4.2 假定 $D \neq \varnothing$，则

(i) 最优控制存在当且仅当

$$\zeta \in R(M) \dot{+} (R(M))^\perp.$$

(ii) 假定上述包含为真，则 u^+ 为最优控制当且仅当

$$u^+ \in [u_0^+ - M^\#(\zeta)] \dot{+} N(M).$$

(iii) 假定对每个 t, $U(t)$ 为可逆的，则存在唯一最优控制

$$u^+ = u_0^+ - M^\#(\zeta).$$

证明 (i) 与 (ii) 由定理 5.3.1 及定理 5.3.2 推出，在其中令 $h = -\zeta, g = 0, L = M$ 且 $N = L_2^m$. 现对每个 t,$U(t)$ 可逆，则 $N(M) = \{\theta\}$，且 $R(M)$ 为闭的. 故由 (i),(ii) 导出 (iii). □

引理 5.4.3　$\{u^+, x^+\}$ 为最优的，当且仅当 $u^+ = u_0^+ + \hat{u}, x^+ = H(u_0^+ + \hat{u}) + \varphi(k_0^+ + \hat{k}) - \varphi Q_2^{\#} F_2(\hat{u}, H(\hat{u}))$, 其中 $\hat{u} \in G, \hat{k} \in N(Q_2)$ 满足

(a) $\int_a^b \varphi^* W^* W x^+ dt + Q_1^* F_1(u^+, x^+) \in (N(Q_2))^\perp$,

(b) $U^*Uu^+ + H^*[W^*Wx^+ + M_1F_1(u^+, x^+)] + N_1F_1(u^+, x^+) - [N_2 + H^*(M_2)]l \in (G)^\perp$.

这里 $n \times 1$ 向量 l 满足矩阵方程：

$$Q_2^* l = \int_a^b \varphi^* W^* W x^+ dt + Q_1^* F_1(u^+, x^+).$$

而 H 的共轭 H^* 由下式给出：

$$(H^* g)(t) = B^*(t)(\varphi^*)^{-1}(t) \int_t^b \varphi^*(s) g(s) ds.$$

证明　由引理 5.4.2, $\{u^+, x^+\}$ 为最优控制 - 响应对当且仅当 u^+ 与 x^+ 具有此引理 (ii) 中的表示，其中 $\hat{u} \in G$ 且 $\hat{k} \in N(Q_2)$ 满足

$$\zeta + p(\hat{u}) + \{\theta, W\varphi\hat{k}, Q_1\hat{k}\} \in (R(M))^\perp. \tag{5.4.2}$$

由 ζ 及 $p(\hat{u})$ 的定义，上式左端等于

$$\begin{aligned}
&\{U(u_0^+ + u), W[H(u_0^+ + u) + \varphi(k_0^+ + \hat{k}) - \varphi Q_2^{\#} F_2(\hat{u}, H(\hat{u}))],\\
&F_1(u_0^+, H(u_0^+)) + Q_1 k_0^+ + F_1(\hat{u}, H(\hat{u})) - Q_1 Q_2^{\#} F_2(\hat{u}, H(\hat{u})) + Q_1\hat{k}\}\\
= \ &\{U(u^+), Wx^+, F_1(u^+, x^+)\},
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
&F_1(u_0^+, H(u_0^+)) + Q_1 k_0^+ + F_1(\hat{u}, H(\hat{u})) - Q_1 Q_2^{\#} F_2(\hat{u}, H(\hat{u})) + Q_1\hat{k}\\
= &\int_a^b N_1^*(u_0^+ + \hat{u}) dt + \int_a^b M_1^*(H(u_0^+ + \hat{u})) dt\\
&+ \int_a^b M_1^* \varphi(k_0^+ + \hat{k}) dt - \int_a^b M_1^* \varphi[Q_2^{\#} F_2(\hat{u}, H(\hat{u}))] dt\\
= &\int_a^b N_1^*(u_0^+ + \hat{u}) dt + \int_a^b M_1^*[H(u_0^+ + \hat{u}) + \varphi(k_0^+ + \hat{k}) - \varphi Q_2^{\#} F_2(\hat{u}, H(\hat{u}))] dt\\
= &\int_a^b [N_1^* u^+ + M_1^* x^+] dt\\
= \ &F_1(u^+, x^+).
\end{aligned}$$

令

$$T_1(u) := F_1(u, H(u)), \quad T_2(u) := F_2(u, H(u)),$$

由 M 的定义，(5.4.2) 等价于

$$\langle Uu^+, Uu\rangle + \langle Wx^+, W[H(u) - \varphi Q_2^{\#} T_2(u)]\rangle + \langle F_1(u^+, x^+), T_1(u) - Q_1 Q_2^{\#} T_2(u)\rangle$$
$$= 0, \quad \forall\, u \in G, \tag{5.4.3}$$

且

$$\langle Wx^+, W\varphi k\rangle + \langle F_1(u^+, x^+), Q_1 \hat{k}\rangle = 0, \forall \ \hat{k} \in N(Q_2). \tag{5.4.4}$$

改变积分的次序, (5.4.3) 等价于

$$\begin{aligned}&\langle U^*Uu^+ + H^*[W^*Wx^+ + M_1F_1(u^+, x^+)] + N_1F_1(u^+, x^+)\\ &- [H^*(M_2) + N_2](Q_2^{\#})^*[(\langle Wx^+, W\varphi\rangle)^t + Q_1^*F_1(u^+, x^+)], u\rangle\\ &= 0, \quad \forall u \in G.\end{aligned} \tag{5.4.5}$$

而 (5.4.4) 等价于

$$(\langle Wx^+, W\varphi\rangle + \langle F_1(u^+, x^+), Q_1\rangle)^t \hat{k} = 0, \quad \forall \hat{k} \in N(Q_2). \tag{5.4.6}$$

令 $\sigma := \langle Wx^+, W\varphi\rangle + \langle F_1(u^+, x^+), Q_1\rangle$, 则 (5.4.5) 等价于

$$\begin{aligned}&U^*Uu^+ + H^*[W^*Wx^+ + M_1F_1(u^+, x^+)] + N_1F_1(u^+, x^+)\\ &- [H^*(M_2) + N_2](Q_2^{\#})^*\sigma \in G^{\perp}.\end{aligned}$$

而 (5.4.6) 等价于

$$\sigma \in (N(Q_2))^{\perp} = R(Q_2^*).$$

取 $l = (Q_2^{\#})^*\sigma$, 则 $Q_2^*l = Q_2^*(Q_2^{\#})^*\sigma = Q_2^*(Q_2^*)^{\#}\sigma = \sigma$. 因此,

$$Q_2^*l = \int_a^b \varphi^*W^*Wx^+ dt + Q_1^*F_1(u^+, x^+) = \sigma \in (N(Q_2))^{\perp}. \qquad \square$$

定理 5.4.1 的证明 由引理 5.4.3, 允许控制 - 响应对 $\{u^+, x^+\}$ 为最优的, 当且仅当 $u^+ = u_0^+ + \hat{u}$, $x^+ = H(u_0^+ + \hat{u}) + \varphi(k_0^+ + \hat{k}) - \varphi Q_2^{\#} F_2(\hat{u}, H(\hat{u}))$, 其中 $\hat{u} \in G, \hat{k} \in N(Q_2)$, 且 (u^+, x^+) 满足

$$\int_a^b \varphi^*W^*Wx^+ dt + Q_1^*F_1(u^+, x^+) = \sigma \in (N(Q_2))^{\perp}, \tag{5.4.7}$$

且

$$\begin{aligned}&U^*Uu^+ + H^*[W^*Wx^+ + M_1F_1(u^+, x^+)] + N_1F_1(u^+, x^+)\\ &- [N_2 + H^*(M_2)]l \in G^{\perp},\end{aligned} \tag{5.4.8}$$

其中 l 满足

$$Q_2 l = \int_a^b \varphi^*W^*Wx^+ dt + Q_1^*F_1(u^+, x^+).$$

令

$$\eta(t) := (\varphi^*)^{-1}(t)\int_t^b \varphi^*(s)[W^*Wx^+ + M_1F_1(u^+,x^+)](s)ds, \tag{5.4.9}$$

因为 $\dfrac{d}{dt}(\varphi^*)^{-1}(t) = -A^*(\varphi^*)^{-1}(t)$, 所以，对 (5.4.9) 两端对 t 求导，得

$$\begin{cases}\dot\eta = -A^*\eta - W^*Wx^+ - M_1F_1(u^+,x^+),\\ \eta(b) = 0.\end{cases} \tag{5.4.10}$$

再令

$$\delta(t) := (\varphi^*)^{-1}(t)\int_t^b \varphi^*(s)M_2(s)ds, \tag{5.4.11}$$

则有

$$\begin{cases}\dot\delta(t) = -A^*\delta - M_2,\\ \delta(b) = 0.\end{cases} \tag{5.4.12}$$

由 (5.4.9), 及 H^* 的定义，有

$$\begin{aligned}B^*(t)\eta(t) &= B^*(t)(\varphi^*)^{-1}(t)\int_t^b \varphi^*(s)[W^*Wx^+ + M_1F_1(u^+,x^+)]ds\\ &= H^*[W^*Wx^+ + M_1F_1(u^+,x^+)](t),\end{aligned} \tag{5.4.13}$$

且由 (5.4.11), 及 H^* 的定义，有

$$B^*(t)\delta(t) = B^*(t)(\varphi^*)^{-1}(t)\int_t^b \varphi^*(s)M_2(s)ds = H^*M_2(t). \tag{5.4.14}$$

从而，将 (5.4.13), (5.4.14) 代入 (5.4.8), 得

$$U^*Uu^+ + B^*\eta + N_1F_1(u^+,x^+) - [N_2 + B^*\delta]l \in G^\perp. \tag{5.4.15}$$

综合 (5.4.10), (5.4.12), (5.4.7) 及 (5.4.15) 得定理 (i)~(iv). □

定理 5.4.1 包含了一大批最优控制问题，特别，包含了广义两点边值问题的经典最优控制问题.

推论 5.4.3 讨论 $J(u,x)$ 在满足下述条件 (i)~(iii) 的所有 $\{u,x\}$ 中的最小化问题:

(i) $x \in L_2^n, u \in L_2^m$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续;

(ii) $\dot x = Ax + Bu$;

(iii) $Mx(a) + N(b) = \gamma_2$,

其中 M, N 为 $d_2 \times n$ 的常数矩阵. 则允许控制-响应对 $\{u^+,x^+\}$ 为最优的，当且仅当存在绝对连续 $n \times 1$ 向量函数 η, 满足

(i) $\dot\eta = -A^*\eta - W^*Wx^+ - M_1F_1(u^+,x^+)$, $\eta(b) = 0$;

(ii) $\int_a^b \varphi^* W^* W x^+ dt + Q_1 F_1(u^+, x^+) \in (N(M + N\varphi(b)))^{\perp}$;

(iii) $U^* U u^+ + B^* \eta + N_1 F_1(u^+, x^+) - B^*(\varphi^*)^{-1}\varphi^*(b) N^* l \in Y^{\perp}$,

其中 $n \times 1$ 常向量 l 满足下述矩阵方程

$$(M + N\varphi(b))^* l = \int_a^b \varphi^* W^* W x^+ dt + Q_1 F_1(u^+, x^+),$$

这里

$$Y = \left\{ u \in L_2^m \middle| \int_a^b N\varphi(b)\varphi^{-1}(s) B(s) u(s) ds \in R(M + N\varphi(b)) \right\}.$$

证明 因为

$$F_2(u, x) \equiv \int_a^b (M_2^* x + N_2^* u) dt = Mx(a) + Nx(b)$$

对一切满足 $\dot{x} = Ax + Bu$ 且 $u \in L_2^m$ 的 $\{u, x\}$ 成立. 由此导出, 对任意 $k \in \mathbb{C}^n$ 及 $u \in L_2^m$, 有 $x(t) = H(u)(t) + \varphi(t)k$, 从而由 $H(u)(a) = 0$ 及 $\varphi(a) = I_{n\times n}$, 有

$$\begin{aligned} &\int_a^b [M_2^*(H(u) + \varphi(k)) + N_2^* u] dt \\ &= Mk + N(H(u)(b) + \varphi(b)k). \end{aligned}$$

因此对一切 $k \in \mathbb{C}^n$ 及 $u \in L_2^m$, 有

$$\int_a^b [M_2^* H(u) + N_2^* u] dt = NH(u)(b), \tag{5.4.16}$$

且

$$\int_a^b M_2^* \varphi k dt = [M + N\varphi(b)](k).$$

于是, 得到

$$Q_2 = M + N\varphi(b) \tag{5.4.17}$$

及 $\forall\, d \in \mathbb{C}^{d_2}$, $\forall u \in L_2^m$, 有

$$\left\langle \int_a^b [M_2^* H(u) + N_2^* u] dt, d \right\rangle = \langle NH(u)(b), d \rangle.$$

从而 $\forall\, u \in L_2^m$, $\forall\, d \in \mathbb{C}^{d_2}$, 有

$$\begin{aligned} &\int_a^b \langle u(t), (H^*(M_2) + N_2) d \rangle dt \\ &= \left\langle \varphi(b) \int_a^b \varphi^{-1}(s) B(s) u(s) ds, N^* d \right\rangle \\ &= \int_a^b \langle u(t), B^*(t)(\varphi^*)^{-1}(t) \varphi^*(b) N^* d \rangle dt, \end{aligned}$$

因此，得

$$B^*(t)(\varphi^*)^{-1}(t)\varphi^*(b)N^* = H^*(M_2) + N_2(t). \tag{5.4.18}$$

于是，由 (5.4.16) 或 (5.4.18) 得

$$\begin{aligned}F_2(u, H(u)) &= \int_a^b [M_2^* H(u) + N_2^* d]dt \\ &= NH(u)(b) \\ &= N\varphi(b)\int_a^b \varphi^{-1}(s)B(s)u(s)ds \\ &= \int_a^b N\varphi(b)\varphi^{-1}(s)B(s)u(s)ds,\end{aligned}$$

因此，定理 5.4.1 中 (iv) 变为

$$U^*Uu^+ + B^*\eta + N_1F_1(u^+, x^+) - B^*(\varphi^*)^{-1}\varphi^*(b)N^*l \in Y^\perp.$$

而由 (5.4.17), 知 l 满足

$$(M + N\varphi(b))^*l = \int_a^b \varphi^*W^*Wx^+dt + Q_1F_1(u^+, x^+),$$

其中

$$\begin{aligned}Y &= \{u \in L_2^m |\ F_2(u, H(u)) \in R(Q_2)\} \\ &= \left\{u \in L_2^m \middle| \int_a^b N\varphi(b)\varphi^{-1}(s)B(s)u(s)ds \in R(M + N\varphi(b))\right\}.\end{aligned}$$

因此，由定理 5.4.1, 立得此推论. □

【注　释】

§5.1　利用有界拟线性投影算子，给出线性算子的齐性广义逆的统一定义，给出存在性的通用判据. 同时给出齐性广义逆成为度量广义逆或线性斜投影广义逆的充要条件. 本节结果属于王玉文及李双臻 [WLz].

§5.2　S. L. Lee 与 M. Z. Nashed 为 Hilbert 空间中多值线性算子引入正交广义逆，并刻画了线性包含的最小二乘解与最佳逼近解 [LN1]. 王玉文及刘晶 [WLu] 利用 Banach 空间中广义正交分解，将上述结果推广到 Banach 空间，给出多值线性算子的度量广义逆，并以此刻画了 Banach 空间中线性包含的极值解与最佳逼近解. 本节内容取自 [WLu].

§5.3~§5.4　利用 Hilbert 空间中多值线性算子的正交广义逆, S. J. Lee 与 M. Z. Nashed[LN4] 研究了约束最小化问题，应用于奇异最优控制，给出最优控制-响应对的判据. 本节内容取自 [LN4].

第六章　线性算子的度量广义逆在不适定 (偏) 微分方程中的应用

度量广义逆是为求解不适定算子方程的极值解，最小范数解或最佳逼近解而引进的广义逆. 当算子取微分算子或偏微分算子时，由此引出具体的应用问题. 由于微分算子或偏微分算子的具体结构，便出现新的研究内容. 本章在实 Banach 空间中讨论.

§6.1　n 阶两点微分算子的广义 Green 函数

1. n 阶两点微分算子及广义 Green 函数的定义

对 $L^2[a,b]$ 的子空间

$$H^n[a,b]=\{u\in C^{n-1}[a,b]\mid u^{(n-1)}\text{在}[a,b]\text{上绝对连续且}u^{(n)}\in L^2[a,b]\}$$

引入范数

$$|u|_{H^n}=\sum_{i=0}^{n-1}\max_{a\leqslant t\leqslant b}|u^{(i)}(t)|+\|u^{(n)}\|_{L^2},$$

则 $H^n[a,b]$ 为 Banach 空间.

$$H_0^n[a,b]=\{u\in H^n[a,b]\mid u^{(i)}(a)=u^{(i)}(b)=0,\ i=0,1,2,\cdots,n-1\}$$

为 $H^n[a,b]$ 中闭子空间, 且为 $C_0^\infty[a,b]$ 在 $H^n[a,b]$ 中的闭包 (见 [Jo4] p.69, 定理 3.3).

给定 n 阶形式微分算子

$$\tau=\sum_{i=0}^{n}a_i(t)\Big(\frac{d}{dt}\Big)^i,$$

其中系数 $a_i(t)$ 属于 $C^\infty[a,b]$ 且在 $[a,b]$ 上 $a_n(t)\neq 0$, 又给定 k $(0\leqslant k\leqslant 2n)$ 个线性无关的边界值泛函

$$B_i(u)=\sum_{j=0}^{n-1}a_{ij}u^{(j)}(a)+\sum_{j=0}^{n-1}B_{ij}u^{(j)}(b),\quad i=1,2,\cdots,k.$$

令

$$D(L)=\{u\in H^n[a,b]\mid B_i(u)=0,\ i=1,2,\cdots,k\}.$$

定义

$$Lu=\tau u. \tag{6.1.1}$$

则 L 称为 $L^2[a,b]$ 中 n 阶两点微分算子，且 L 为 $L^2[a,b]$ 中 Fredholm 算子，(见 [Jo4] p.93, 注记 6.8), 即 L 为 $L^2[a,b]$ 中稠定的闭线性算子，$R(L)$ 在 $L^2[a,b]$ 中闭，$\dim N(L)<\infty$ 且 $\operatorname{codim}R(L)<\infty$.

设

$$\tau^* = \sum_{i=0}^{n} b_i(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^i,$$

为 τ 的形式共轭，其中系数 $b_i(t)$ 为

$$b_i(t) = \sum_{j=i}^{n}(-1)^j \binom{j}{i}\left(\frac{d}{dt}\right)^{j-i} a_j(t),\ i = 0, 1, \cdots, n,$$

其中 $b_n(t) = (-1)^n a_n(t) \neq 0,\ t \in [a, b]$. 设

$$B_i^*(u) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}^* u^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} B_{ij}^* u^{(j)}(b),\quad i = 1, 2, \cdots, 2n-k,$$

为 $2n-k$ 个线性无关的共轭边值泛函. L 的共轭算子 L^* 亦为 n 阶两点微分算子，定义为

$$D(L^*) = \{u \in H^n[a, b] \mid B_i^*(u) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, 2n-k\}$$

且

$$L^* u = \tau^* u,\quad u \in D(L^*). \tag{6.1.2}$$

显然， L^* 亦为 $L^2[a, b]$ 中的 Fredholm 算子.

设 $C(L) = D(L) \cap N(L)^{\perp}$, $L_0 = L|_{C(L)}$ 为 L 在 $C(T)$ 上的限制. $T_0 : C(L) \to R(L)$ 为一一闭线性算子，从而 $T_0^{-1} : R(L) \to C(T)$为一一线性算子，且由开映射定理， T_0^{-1} 为从 $(R(L), \|\cdot\|_{L^2})$ 到 $(C(L), |\cdot|_{H^n})$ 上的连续线性算子.

设 P 与 Q 分别为从 $L^2[a, b]$ 到 $N(L)$ 与 $N(L^*)$ 上的正交投影算子，则 L 的 Moore-Penrose 广义逆 L^+ 存在，且

$$L^+ = L_0^{-1}(I - Q),\quad 在L^2[a, b]上$$

或

$$L^+ = (I - P)L^{-1}(I - Q). \tag{6.1.3}$$

固定 $t \in [a, b]$, 设 $F_t \cdot L^2[a, b] \to R$ 为线性泛函，定义为

$$F_t(u) = L^+ u(t),\ \forall u \in L^2[a, b]. \tag{6.1.4}$$

由于在一点赋值泛函为 $H^n[a, b]$ 在 $H^n[a, b]$ 结构下的连续线性泛函, 故 F_t 为 $L^2[a, b]$ 上的连续线性泛函. 由 Riesz 表示定理，存在唯一 $G(t, \cdot) \in L^2[a, b]$ 使得： $\forall u \in L^2[a, b]$, 有

$$L^+ u(t) = F_t(u) = \int_a^b G(t, s) u(s) ds, \tag{6.1.5}$$

且 (6.1.5) 对每个 $t \in [a, b]$ 成立. 函数 $G(t, s)$ 称为 L 的广义 Green 函数.

为研究广义 Green 函数, 将利用 $2n$ 阶自共轭微分算子 LL^* 与 L^*L (见 [Jo4]p.172). 它们定义为

$$D(LL^*) = \{u \in H^{2n}[a,b] \mid B_i^*(u) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, 2n-k;$$
$$B_j(\tau^* u) = 0,\ j = 1, 2, \cdots, k\}$$

且

$$LL^* u = \tau\tau^* u,\ u \in D(LL^*),$$

其中

$$\tau\tau^* = \sum_{i=0}^{2n} c_i(t)\Big(\frac{d}{dt}\Big)^i = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}\binom{i}{l} a_i(t)\cdot b_j^{(i-l)}(t)\Big(\frac{d}{dt}\Big)^{j+l}. \tag{6.1.6}$$

由此看出: $\forall t \in [a,b]$, 有

$$c_{2n}(t) = a_n(t)b_n(t) = (-1)^n[b_n(t)]^2 \neq 0.$$

如果令 $B_i^*(\tau u) = B_i(\tau^* u)$, $u \in H^{2n}[a,b]$, 应用 Leibniz 公式, 可将边界值泛函 B_i^* 表示为

$$\begin{aligned} B_i^*(\tau u) = & \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij}^* \sum_{l=0}^{n}\sum_{p=l}^{l+j}\binom{j}{p-l} b_l^{(j-p+l)}(a)u^{(p)}(a) \\ & + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{ij}^* \sum_{l=0}^{n}\sum_{p=l}^{l+j}\binom{j}{p-l} b_l^{(j-p+l)}(b)u^{(p)}(b), \end{aligned} \tag{6.1.7}$$

对一切 $u \in H^{2n}[a,b]$, $i = 1, 2, \cdots, k$ 成立.

另一个经常应用的工具为 Green 公式 (见 [DS] p.1288): $\forall u, v \in H^n[a,b]$, 有

$$\int_a^b \tau u(s)v(s)ds = \int_a^b u(s)\tau^* v(s)ds + F_b(\tau)(u,v) - F_a(\tau)(u,v), \tag{6.1.8}$$

其中

$$F_t(\tau)(u,v) = \sum_{j,l=0}^{n-1} F_t^{lj}(\tau)u^{(l)}(t)v^{(j)}(t)$$

为 τ 在 t 点的边界形式, 这里

$$F_t^{lj}(\tau) = \sum_{i=j}^{n-l-1}(-1)^i\binom{i}{j}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^{i-j} a_{l+i+1}(t),\ j + l \leqslant n-1,$$

$$F_t^{lj}(\tau) = 0,\quad j + l > n-1.$$

对于 $j + l = n-1$, 有

$$F_t^{l,n-l-1}(\tau) = (-1)^{n-l-1}a_n(t).$$

于是对每个 $t \in [a,b]$, $n \times n$ 矩阵 $[F_t^{lj}(\tau)]$ 为非奇异阵. 关于边界形式 $F_t(\tau^*)$, $F_t(\tau\tau^*)$ 及 $F_t(\tau^*\tau)$ 有类似的结果 (见 [Jo4]p.55).

2. 广义 Green 函数的连续性与跳跃条件

定理 6.1.1 对于一切 $t \in [a,b]$, $G(t,\cdot) \in N(L^*)^{\perp} = R(L)$.

证明 对于任意固定的 $t \in [a,b]$, 任取 $u \in N(L^*) = R(L)^{\perp}$, 有 $Qu = 0$, 从而由 (6.1.5), 有

$$\int_a^b G(t,s)u(s)ds = L^+u(t) = L_0^{-1}Qu(t) = 0. \tag{6.1.9}$$

因此 $G(t,\cdot) \in N(L^*)^{\perp}$. □

为导出 $G(t,s)$ 的连续性与可微性, 下列的引理非常有用.

引理 6.1.1 对任意 $u \in D(LL^*)$, 及任意 $t \in [a,b]$, 有

$$\int_a^b G(t,s)\tau\tau^*u(s)ds = \tau^*u(t).$$

证明 固定 $t \in [a,b]$, 任取 $u \in D(LL^*)$, 令 $v = L^*u = \tau^*u$, 则 $v \in D(L) \cap N(L)^{\perp}$, 且

$$\int_a^b G(t,s)\tau\tau^*u(s)ds = L_0^{-1}QLv(t) = v(t) = \tau^*u(t).$$ □

引理 6.1.2 若 $u \in L^2[a,b]$ 且 $\forall v \in H_0^n[a,b]$ 使 $\tau^*v \in H_0^n[a,b]$ 与 $\int_a^b u(t)\tau(\tau^* \cdot v(t))dt = 0$, 则 $u \in H^n[a,b]$, $\tau^*u \in H^n[a,b]$, 且 $\tau(\tau^*u) = 0$.

证明 见 [Jo4] p.187, 引理 2.11. □

定理 6.1.2 对每个 $c \in (a,b)$, 有

(i) $G(c,\cdot) \in H^n[a,c]$, 且 $\tau^*G(c,\cdot) \in H^n[a,c]$ 满足 $\tau(\tau^*G(c,s)) = 0$, $s \in [a,c]$.

(ii) $G(c,\cdot) \in H^n[c,b]$, 且 $\tau^*G(c,\cdot) \in H^n[c,b]$ 满足 $\tau(\tau^*G(c,s)) = 0$, $s \in [c,b]$.

(iii) $G(a,\cdot) \in H^n[a,b]$, 且 $G(b,\cdot) \in H^n[a,b]$, $\tau^*G(a,\cdot) \in H^n[a,b]$ 且 $\tau^*G(b,\cdot) \in H^n[a,b]$, $\tau(\tau^*G(a,s)) = \tau(\tau^*G(b,s)) = 0$, $s \in [a,b]$.

证明 (i) 对固定 $c \in (a,b)$, 任取使 $\tau^*v \in H_0^n[a,c]$ 的 $v \in H_0^n[a,c]$. 取 $v(t) \equiv 0$, $t \in [c,b]$, 则 v 延拓到 $[a,b]$ 上, 显然, $v \in H_0^1[a,b]$ 且 $\tau^*v \in H_0^n[a,b]$, 于是, $v \in D(LL^*)$. 由引理 6.1.1, 有

$$\int_a^c G(c,s)\tau(\tau^*v(s))ds = \int_a^b G(c,s)\tau(\tau^*v(s))ds = \tau^*v(c) = 0.$$

由引理 6.1.2, 得 $G(c,\cdot) \in H^n[a,c]$ 且 $\tau^*G(c,\cdot) \in H^n[a,c]$, 满足

$$\tau(\tau^*G(c,s)) = 0, \ s \in [a,c].$$

(ii), (iii) 可同样证明. □

定理 6.1.3 对每个 $c \in (a,b)$, 有

(i) $\lim\limits_{s\to c^+} \dfrac{\partial^j G}{\partial s^j}(c,s) = \lim\limits_{s\to c^-} \dfrac{\partial^j G}{\partial s^j}(c,s)$, $j = 0,\cdots,n-2$,

(ii) $\lim\limits_{s\to c^+}\dfrac{\partial^{n-1}G}{\partial s^{n-1}}(c,s)-\lim\limits_{s\to c^-}\dfrac{\partial^{n-1}G}{\partial s^{n-1}}(c,s)=(-1)^n a_n(c)^{-1}=b_n(c)^{-1}$,

(iii) $\lim\limits_{s\to c^+}\dfrac{\partial j}{\partial s^j}(\tau^*G(c,s))=\lim\limits_{s\to c^-}\dfrac{\partial j}{\partial s^j}(\tau^*G(c,s)),\quad j=0,\cdots,n-1.$

证明 任意固定 $c\in(a,b)$, 设 $\eta_-(s)=G(c,s),s\in[a,c]$, $\eta_+(s)=G(c,s)$, $s\in[c,b]$. 任取满足 $\tau^*u\in H_0^n[a,b]$ 的 $u\in H_0^n[a,b]$, 显然 $u\in D(LL^*)$, 由引理 6.1.1 与 Green 公式 (6.1.8), 有

$$\begin{aligned}
\tau^*u(c)&=\int_a^b G(c,s)\tau(\tau^*u(s))ds\\
&=\int_a^c \eta_-(s)\tau(\tau^*u(s))ds+\int_c^b \eta_+(s)\tau(\tau^*u(s))ds\\
&=\int_a^c \tau^*\eta_-(s)\tau^*u(s)ds+\int_c^b \tau^*\eta_+(s)\tau^*u(s)ds\\
&\quad+\sum_{l,j=0}^{n-1}F_c^{lj}(\tau)\{\eta_-^{(j)}(c)-\eta_+^{(j)}(c)\}\left[\left(\frac{d}{ds}\right)^l(\tau^*u(s))\right]_{s=c}\\
&=\sum_{l,j=0}^{n-1}F_c^{lj}(\tau^*)\left\{\left[\left(\frac{d}{ds}\right)^j(\tau^*\eta_-(s))\right]_{s=c}-\left[\left(\frac{d}{ds}\right)^j(\tau^*\eta_+(s))\right]_{s=c}\right\}u^{(l)}(c)\\
&\quad+\sum_{l,j=0}^{n-1}F_c^{lj}(\tau)\{\eta_-^{(j)}(c)-\eta_+^{(j)}(c)\}\left[\left(\frac{d}{ds}\right)^l(\tau^*u(s))\right]_{s=c}.
\end{aligned}\tag{6.1.10}$$

我们可以选 $u\in H_0^n[a,b]$ 使 $\tau^*u\in H_0^n[a,b]$, 且可使

$$u^{(l)}(c),\ \left[\left(\frac{d}{ds}\right)^l(\tau^*u(s))\right]_{s=c},\quad l=0,1,\cdots,n-1,$$

取任意指定的数值 (见 [Jo4] p.190, 推论 2.15). 特别, 可取其中一个值为 1, 而其余的数值为 0, 于是由 (6.1.10) 得

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n-1}F_c^{lj}(\tau^*)\left\{\left[\left(\frac{d}{ds}\right)^j(\tau^*\eta_-(s))\right]_{s=c}-\left[\left(\frac{d}{ds}\right)^j(\tau^*\eta_+(s))\right]_{s=c}\right\}\\
&=0,\qquad l=0,1,\cdots,n-1,
\end{aligned}\tag{6.1.11}$$

且

$$\sum_{j=0}^{n-1}F_c^{lj}(\tau)\{\eta_-^{(j)}(c)-\eta_+^{(j)}(c)\}=\delta_{0l},\ l=0,1,\cdots,n-1.\tag{6.1.12}$$

因为 $n\times n$ 边界矩阵 $[F_c^{lj}(\tau^*)]$ 与 $[F_c^{lj}(\tau)]$ 为非奇异的, 从而线性方程组 (6.1.11) 及 (6.1.12) 容易求解.

由 (6.1.11) 立刻得到

$$\left[\left(\frac{d}{ds}\right)^j(\tau^*\eta_-(s))\right]_{s=c}-\left[\left(\frac{d}{ds}\right)^j(\tau^*\eta_+(s))\right]_{s=c}=0,\ j=0,1,2,\cdots,n-1.$$

此为 (iii).

为求解 (6.1.12), 首先注意

$$F_c^{lj}(\tau)=0,\quad l+j>n-1,$$

且

$$F_c^{l,n-l-1}(\tau)=(-1)^{n-l-1}a_n(c)=(-1)^{l+1}b_n(c),\quad l=0,1,2,\cdots,n-1.$$

因此 (6.1.12) 为三角形式方程组，从底部开始，依次向上求解，得

$$\eta_-^{(j)}(c)-\eta_+^{(j)}(c)=0,\ j=0,1,\cdots,n-2, \tag{6.1.13}$$

且

$$\eta_-^{(n-1)}(c)-\eta_+^{(n-1)}(c)=(-1)^{n-1}a_n(c)^{-1}=-b(c)^{-1}. \tag{6.1.14}$$

此为 (i) 与 (ii). □

推论 6.1.4 对于 $c\in(a,b)$, 有 $G(c,\cdot)\in H^{n-1}[a,b]$ 且 $\tau^*G(c,\cdot)\in H^n[a,b]$.

3. 广义 Green 函数的边界条件

因为 $G(c,\cdot)\in H^n[a,c]$ 且 $G(c,\cdot)\in H^n[c,b]$, 为下面定理的应用，定义

$$B_i^*(G(c,\cdot))=\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_{ij}^*\frac{\partial^j}{\partial s^j}G(c,a)+\sum_{j=0}^{n-1}\beta_{ij}^*\frac{\partial^j}{\partial s^j}G(c,b),\ i=1,2,\cdots,2n-k.$$

注意到 $\tau^*G(c,\cdot)\in H^n[a,b]$, 所以 $B_i(\tau^*G(c,\cdot))$ 有定义.

定理 6.1.5 对每个 $c\in(a,b)$, 函数 $G(c,\cdot)$ 满足边界条件

(i) $B_i^*(u)=0,\ i=1,2,\cdots,2n-k,$

(ii) $B_i(\tau^*u)=0,\ i=1,2,\cdots,k.$

证明 任意固定 $c\in(a,b)$, 设 $\eta_-(s)=G(c,s),s\in[a,c]$, 且 $\eta_+(s)=G(c,s)$, $s\in[c,b]$. 选择 $v\in H^n[a,b]$ 使 $\tau^*v\in H^n[a,b]$ 且

$$v^j(a)=\eta_-^j(a),v^j(b)=\eta_+^j(b),j=0,1,\cdots,n-1,$$

$$\left[\left(\frac{d}{ds}\right)^j(\tau^*v(s))\right]_{s=a}=\left[\left(\frac{d}{ds}\right)^j(\tau^*\eta_-(s))\right]_{s=a},\ j=0,1,2,\cdots,n-1,$$

$$\left[\left(\frac{d}{ds}\right)^j(\tau^*v(s))\right]_{s=b}=\left[\left(\frac{d}{ds}\right)^j(\tau^*\eta_+(s))\right]_{s=b},\ j=0,1,2,\cdots,n-1.$$

这样的 v 是存在的 (见 [Jo4] p.190, 推论 2.15).

对任意 $u\in D(LL^*)$, 应用 Green 公式，及等式 (6.1.11) 与 (6.1.12) 得

$$\begin{aligned}&\int_a^b\tau(\tau^*u(s))v(s)ds-\int_a^b G(c,s)\tau(\tau^*u(s))ds\\ =&\int_a^c\tau(\tau^*u(s))[v(s)-\eta_-(s)]ds+\int_c^d\tau(\tau^*u(s))[v(s)-\eta_+(s)]ds\\ =&\int_a^c\tau^*u(s)[\tau^*v(s)-\tau^*\eta_-(s)]ds+\int_c^b\tau^*u(s)[\tau^*v(s)-\tau^*\eta_+(s)]ds\end{aligned}$$

$$-\underbrace{\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}F_c^{lj}(\tau)\{\eta_-^{(j)}(c)-\eta_+^{(j)}(c)\}}_{\delta_{0l}}\left[\left(\frac{d}{ds}\right)^l(\tau^*u(s))\right]_{s=c}$$

$$=\int_a^c\tau^*u(s)[\tau^*v(s)-\tau^*\eta_-(s)]ds+\int_c^b\tau^*u(s)[\tau^*v(s)-\tau^*\eta_+(s)]ds-\tau^*u(c)$$

$$=\int_a^b u(s)\tau(\tau^*v(s))ds-\tau^*u(c)-\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}F_c^{lj}(\tau^*)\Big\{\left[\left(\frac{d}{ds}\right)^j(\tau^*\eta_-(s))\right]_{s=c}$$

$$-\left[\left(\frac{d}{ds}\right)^j(\tau^*\eta_+(s))\right]_{s=0}\Big\}u^{(l)}(c)$$

$$=\int_a^b u(s)\tau(\tau^*v(s))ds-\int_a^b G(c,s)\tau(\tau^*u(s))ds\quad(\text{由引理 (6.1.11)}).$$

于是，得到： $\forall u\in D(LL^*)$, 有

$$\int_a^b\tau(\tau^*u(s))v(s)ds=\int_a^b u(s)\tau(\tau^*v(s))ds.$$

这蕴涵 $v\in D(LL^*)$, 从而 v 满足期望的边界条件，于是得出结论： $G(c,\cdot)$ 也满足这些边界条件. □

§6.2 n 阶两点微分算子广义 Green 函数的表示

设 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n$ 与 $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n$ 为 $H^n[a,b]$ 中函数，分别形成子空间 $\{u\in H^n[a,b]\mid\tau u=0\}$ 与 $\{v\in H^n[a,b]\mid\tau^*v=0\}$ 的基. 设

$$p=\dim N(L),\ q=\dim(L^*),$$

不失一般性，假定 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_p$ 与 $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_q$ 分别为 $N(L)$ 与 $N(L^*)$ 的正交基. 投影算子 P 与 Q 可分别用这些函数由下式给出： $\forall u\in L^2[a,b]$, 有

$$Pu(t)=\int_a^b\int_a^b\Big[\sum_{i=1}^p\psi_i(t)\psi_i(s)\Big]u(s)ds,\ a\leqslant t\leqslant b,$$

$$Qu(s)=\int_a^b\int_a^b\Big[\sum_{i=1}^q\phi_i(t)\phi_i(s)\Big]u(t)dt,\ a\leqslant s\leqslant b.$$

选择函数 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 与 $\theta_1,\cdots,\theta_n\in H^n[a,b]$ 使得

$$\tau^*\omega_i=\psi_i\text{且 }\tau\theta_i=\phi_i,\ i=1,2,\cdots,n.$$

则 $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n,\omega_1,\cdots,\omega_n$ 形成 $\tau\tau^*$ 的零空间的基， $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n,\theta_1,\cdots,\theta_n$ 形式 $\tau^*\tau$ 的零空间的基 (参见 [Jo4] p.186, (2.12), (2,13)). 我们将从 $\psi_i(t),\phi_j(s),\omega_i(s)$ 及 $\theta_j(t)$ 给出广义 Green 函数的表示.

引理 6.2.1　设 $c\in(a,b), \eta_-(s)=G(c,s),\ s\in[a,c]$ 且 $\eta_+(s)=G(c,s),\ s\in[c,b]$. 则

$$F_c(\tau^*)(\eta_+,u)-F_c(\tau^*)(\eta_-,u)=u(c),\ \forall u\in H^n[a,b], \tag{6.2.1}$$

且

$$F_b(\tau^*)(\eta_+,u)-F_a(\tau^*)(\eta_-,u)=0,\ \forall u\in D(L). \tag{6.2.2}$$

证明　任取 $u\in H^n[a,b]$, 由 (6.1.13) 与 (6.1.14), 有

$$\begin{aligned}F_c(\tau^*)(\eta_+,u)-F_c(\tau^*)(\eta_-,u)&=\sum_{l,j=0}^{n-1}F_c^{lj}(\tau^*)\left[\eta_+^{(l)}(c)-\eta_-^{(l)}(c)\right]u^{(j)}(c)\\&=\sum_{j=0}^{n-1}F_c^{n-1,j}(\tau^*)\left[b_n(c)^{-1}\right]u^{(j)}(c)\\&=\underbrace{F_c^{n-1,0}(\tau^*)}_{b_n(c)}\left[b_n(c)^{-1}\right]u(c)=u(c).\end{aligned}$$

其次，任取 $u\in D(L)$, 选函数 $v\in H^n[a,b]$, 使

$$v^{(l)}(a)=\eta_-^{(l)}(a)\ 且\ v^{(l)}(b)=\eta_+^{(l)}(b),\ l=0,1,\cdots,n-1.$$

由定理 6.1.5, 有 $B_i^*(v)=0,\ i=1,2,\cdots,2n-k$, 于是 $v\in D(L^*)$. 应用 Green 公式，得到

$$\begin{aligned}0&=(L^*v,u)-(v,Lu)\\&=\int_a^b\tau^*v(t)u(t)dt-\int_a^b v(t)\tau u(t)dt\\&=\sum_{l,j=0}^{n-1}F_b^{lj}(\tau^*)v^{(l)}(b)u^{(j)}(b)-\sum_{l,j=0}^{n-1}F_a^{lj}(\tau^*)v^{(l)}(a)u^{(j)}(a)\\&=F_b(\tau^*)(\eta_+,u)-F_a(\tau^*)(\eta_-,u).\end{aligned}$$

□

定理 6.2.1　对任意 $c\in(a,b)$, 有

$$\tau^*G(c,s)=-\sum_{i=1}^{p}\psi_i(c)\psi_i(s),\ s\in[a,b]. \tag{6.2.3}$$

证明　任意固定 $c\in(a,b)$, 设 $\eta_-(s)=G(c,s),s\in[a,c]$, 而 $\eta_+(s)=G(c,s),s\in[c,b]$. 任取 $u\in L^2[a,b]$, 设 $v=Pu\in N(L)$ 且 $w=(I-P)u\in N(L)^\perp$. 因为 $\tau^*G(c,\cdot)\in N(L)$, 从而 $\tau^*G(c,\cdot)$ 与 w 正交，于是

$$\begin{aligned}\int_a^b\tau^*G(c,s)u(s)ds&=\int_a^b\tau^*G(c,s)v(s)ds\\&=\int_a^c\tau^*\eta_-(s)v(s)ds+\int_c^b\tau^*\eta_+(s)v(s)ds\end{aligned}$$

$$= F_c(\tau^*)(\eta_-, v) - F_a(\tau^*)(\eta_-, v) + F_b(\tau^*)(\eta_+, v) - F_c(\tau^*)(\eta_+, v)$$
$$= -v(c) \quad (\text{由引理 } 6.2.1)$$
$$= -Pu(c),$$

或者， $\forall u \in L^2[a,b]$, 有

$$\int_a^b \tau^* G(c,s)u(s)ds = \int_a^b \Big[-\sum_{i=1}^p \psi_i(c)\psi_i(s)\Big]u(s)ds.$$

从而，得

$$\tau^* G(c,s) = -\sum_{i=1}^p \psi_i(c)\psi_i(s), \text{ a.e. } s \in [a,b]. \qquad \square$$

注记 将在推论 6.2.6 中，证得： (6.2.3) 对 $c = a$ 或 $c = b$ 亦真.

现固定 $c \in (a,b)$, 集中讨论函数 $G(c,\cdot)$. 由定理 6.2.1, 有

$$\tau^*\Big[G(c,s) + \sum_{i=1}^p \psi_i(c)\omega_i(s)\Big] = 0, \ s \in [a,c),$$

$$\tau^*\Big[G(c,x) + \sum_{i=1}^p \psi_i(c)\omega_i(s)\Big] = 0, \ s \in (c,b].$$

从而存在 $\{\alpha_i(c)\}_{i=1}^n$ 与 $\{\beta_i(c)\}_{i=1}^n$ 满足

$$G(c,s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(c)\phi_i(s) - \sum_{i=1}^p \psi_i(c)\omega_i(s), \ s \in [a,c), \tag{6.2.4}$$

$$G(c,s) = \sum_{i=1}^n \beta_i(c)\phi_i(s) - \sum_{i=1}^p \psi_i(c)\omega_i(s), \ s \in (c,b].$$

在 (6.2.4) 中， $2n$ 个数值 $\{\alpha_i(c)\}_{i=1}^n$ 与 $\{\beta_i(c)\}_{i=1}^n$ 须由以下三组条件确定： (i) 关于 $\dfrac{\partial^j G}{\partial s^j}(c,\cdot)$ 的 n 个跳跃条件 (定理 6.1.3); (ii) $2n-k$ 个边界条件 $B_i^*(u) = 0$ $(i = 1,2,\cdots,2n-k)$ (定理 6.1.5); (iii) q 个正交性条件 (定理 6.1.1). 全部共有方程数为

$$n + (2n-k) + q = 2n + (n-k+q) = 2n + p,$$

而未知数仅有 $2n$ 个 $\alpha_i(c)$ 与 $\beta_i(c)(i = 1,2,\cdots,n)$. 因此，我们要去掉 p 个方程.

由 (6.2.4), 定理 6.1.3 中关于 $\dfrac{\partial^j G}{\partial s^j}(c,\cdot)$ 的 n 个跳跃条件变为

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^n \beta_i(c)\phi_i^{(j)}(c) - \sum_{i=1}^n \alpha_i(c)\phi_i^{(j)}(c) = 0, \ j = 0,1,\cdots,n-2, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^n \beta_i(c)\phi_i^{(n-1)}(c) - \sum_{i=1}^n \alpha_i(c)\phi_i^{(n-1)}(c) = b_n(c)^{-1}. \end{cases} \tag{6.2.5}$$

设

$$C_j^*(u)=\sum_{l=0}^{n-1}\alpha_{jl}^*u^{(l)}(a),\ D_j^*(u)=\sum_{l=0}^{n-1}\beta_{jl}^*u^{(l)}(b),\quad j=1,2,\cdots,2n-k.$$

所以

$$B_j^*=C_j^*+D_j^*,\ j=1,2,\cdots,2n-k.$$

由 (6.2.4), 定理 6.1.5 中的 $2n-k$ 个边值条件 $B_j^*(u)=0\ (j=1,2,\cdots,2n-k)$ 变为

$$\sum_{l=0}^{n-1}\alpha_{jl}^*\Big[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(c)\phi_i^{(l)}(a)-\sum_{i=1}^{n}\psi_i(c)\omega_i^{(l)}(a)\Big]$$
$$+\sum_{l=0}^{n-1}\beta_{jl}^*\Big[\sum_{i=1}^{n}\beta_i(c)\phi_i^{(l)}(b)-\sum_{i=1}^{p}\psi_i(c)\omega_i^{(l)}(b)\Big]=0,\ j=1,2,\cdots,2n-k,$$

或等价地

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(c)C_j^*(\phi_i)+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(c)D_j^*(\phi_i)=\sum_{i=1}^{p}\psi_i(c)B_j^*(\omega_i),$$
$$j=1,2,\cdots,2n-k. \tag{6.2.6}$$

最后，由 (6.2.4), 定理 6.1.1 中的正交条件变为

$$\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i(c)\int_a^c\phi_i(s)\phi_j(s)ds-\sum_{i=1}^{p}\psi_i(c)\int_a^c\omega_i(s)\phi_j(s)ds$$
$$+\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i(c)\int_c^b\phi_i(s)\phi_j(s)ds-\sum_{i=1}^{p}\psi_i(c)\int_c^b\omega_i(s)\phi_j(s)ds=0,$$
$$j=1,\cdots,q,$$

或者

$$\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i(c)\int_a^c\phi_i(s)\phi_j(s)ds+\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i(c)\int_c^b\phi_i(s)\phi_j(s)ds$$
$$=\sum_{i=1}^{p}\psi_i(c)\int_a^b\omega_i(s)\phi_j(s)ds,\ j=1,\cdots,q. \tag{6.2.7}$$

在 (6.2.5), (6.2.6), (6.2.7) 中共有 $2n+p$ 个方程, 需确定 $2n$ 个数 $\alpha_1(c),\cdots,\alpha_n(c)$, $\beta_1(c),\cdots,\beta_n(c)$. 为从中确定 $2n\times 2n$ 的非奇异线性方程组，关键需确定哪 p 个方程可以消去.

为此，我们考察共轭边界值泛函 $B_1^*,\cdots,B_{2n-k}^*$. 任取 $\psi\in\{u\in H^n[a,b]\mid \tau u=0\}$, 对任意的 $u\in H^n[a,b]$, 应用 Green 公式，有

$$\int_a^b \tau^* u(t)\psi(t)dt = F_b(\tau^*)(u,\psi) - F_a(\tau^*)(u,\psi)$$
$$= \sum_{l,j=0}^{n-1} F_b^{lj}(\tau^*)u^{(l)}(b)\psi^{(j)}(b) - \sum_{l,j=0}^{n-1} F_a^{lj}(\tau^*)u^{(l)}(a)\psi^{(j)}(a).$$

定义 $\widetilde{B}^* : H^n[a,b] \to R$ 为

$$\widetilde{B}^*(u) = \int_a^b \tau^* u(t)\psi(t)dt$$
$$= \sum_{l=0}^{n-1}\Big[-\sum_{j=0}^{n-1} F_a^{lj}(\tau^*)\psi^{(j)}(a)\Big]u^{(l)}(a)$$
$$+\sum_{l=0}^{n-1}\Big[\sum_{j=0}^{n-1} F_b^{lj}(\tau^*)\psi^{(j)}(b)\Big]u^{(l)}(b),\ u \in H^n[a,b]. \tag{6.2.8}$$

显然 (6.2.8) 定义了 $H^n[a,b]$ 上的边界值泛函，且

$$\widetilde{B}^*(\phi) = 0,\ \forall \phi \in \text{span}\{\phi_1, \cdots, \phi_n\}. \tag{6.2.9}$$

下面，设 $\psi \in N(L)$, 则对任意的 $u \in D(L^*)$, 有 $\tau^* u = L^* u = R(L^*) = N(L)^\perp$, 从而 $\tau^* u \perp \psi$, 有

$$\widetilde{B}^*(u) = 0,\quad \forall u \in D(L^*). \tag{6.2.10}$$

我们断言

$$\widetilde{B}^* \in \text{span}\{B_1^*, \cdots, B_{2n-k}^*\}. \tag{6.2.11}$$

事实上，在 $H^n[a,b]$ 上引入内积

$$(u,v)_{\tau^*} = (u,v) + (\tau^* u, \tau^* v),\quad u,v \in H^n[a,b],$$

易知范数 $\|\cdot\|_{\tau^*}$ 与 $\|\cdot\|_{H^n}$ 等价. 从而由 (6.2.10), 知 $D(L^*) \subset \text{span}\{\widetilde{B}^*\}^\perp$, 于是

$$\text{span}\{\widetilde{B}^*\} \subseteq D(L^*)^\perp = \text{span}\{B_1^*, \cdots, B_{2n-k}^*\}.$$

故 (6.2.11) 为真.

对 $i = 1, 2, \cdots, p$, 定义

$$\widetilde{B}_i^*(u) = \int_a^b \tau^* u(t)\psi_i(t)dt,\ u \in H^n[a,b], \tag{6.2.12}$$

则 $\widetilde{B}_1^*, \cdots, \widetilde{B}_p^*$ 为 $H^n[a,b]$ 上的边界值泛函，而且

$$\text{span}\{\widetilde{B}_1^*, \cdots, \widetilde{B}_p^*\} \subseteq \text{span}\{\widetilde{B}_1^*, \cdots, \widetilde{B}_{2n-k}^*\}.$$

将 $\widetilde{B}_1^*, \cdots, \widetilde{B}_p^*$ 称为确定共轭算子 L^* 的自然边界值泛函.

下面证：$\{\widetilde{B}_i^*\}_{i=1}^p$ 为线性无关的.

假设 $\sum_{i=1}^{p} x_i \widetilde{B}_i^* = 0$. 记 $\psi(t) = \sum_{i=1}^{p} x_i \psi_i(t)$, 将 (6.2.12) 式两端乘 x_i 然后从 $i=1$ 到 p 求和, $\forall u \in H^n[a,b]$ 有

$$\int_a^b \tau^* u(t)\psi(t)dt = \sum_{i=1}^{p} x_i \widetilde{B}_i^*(u) = 0. \tag{6.2.13}$$

注意到 $R(T_1(\tau^*)) = L^2[a,b]$ (这里, $D(T_1(\tau^*)) = H^n[a,b]$, $T_1(\tau^*)(u) = \tau^* u$, $\forall u \in D(T_1(\tau^*))$; $D(T_0(\tau)) = H_0^n[a,b]$, $T_0(\tau)(u) = \tau u$, $\forall u \in D(T_0(\tau))$. 易知 $(T_0(\tau))^* = T_1(\tau^*)$, 且 $N(T_0(\tau)) = \{\theta\}$, 从而 $R(T_1(\tau^*)) = N(T_0(\tau))^{\perp} = L^2[a,b]$). 由 (6.2.13), 得 $\psi(t) = 0,\ t \in [a,b]$. 再由 $\{\psi_i\}_{i=1}^{p}$ 的线性无关性, 得 $x_i = 0, i = 1,2,\cdots,p$.

不失一般性, 设

$$B_i^* = \widetilde{B}_i^*, \cdots, B_p^* = \widetilde{B}_p^*. \tag{6.2.14}$$

由 (6.2.9), 有

$$B_i^*(\phi) = \widetilde{B}_i^*(\phi) = 0,\ \forall \phi \in \operatorname{span}\{\phi_1, \cdots, \phi_n\}, 1, 2, \cdots, p. \tag{6.2.15}$$

由 (6.2.8), 可知 $B_i^*(i = 1, \cdots, p)$ 的经典表达式中系数 $\alpha_{ij}^*, \beta_{ij}^*$ 可由下式给定:

$$\alpha_{ij}^* = -\sum_{l=0}^{n-1} F_a^{jl}(\tau^*)\psi_i^{(l)}(a),\ \beta_{ij}^* = \sum_{l=0}^{n-1} F_b^{jl}(\tau^*)\psi_i^{(l)}(b), \tag{6.2.16}$$

其中 $i = 1, \cdots, p,\ j = 1, 2, \cdots, n-1$.

对任意点 $c \in [a,b]$, 讨论在涉及自然边界值的假设 (6.2.14) 下的线性方程组 (6.2.5), (6.2.6), (6.2.7). 此时 (6.2.6) 中的方程可分为两类: 第一类为

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(c) C_j^*(\phi_i) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(c) D_j^*(\phi_i) = \sum_{i=1}^{p} \psi_i(c) B_j^*(\omega_i),\ j = 1, \cdots, p\ . \tag{6.2.6A}$$

这一组仅涉及到 L^* 的自然边界值.

第二类, 为其余的方程

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(c) C_j^*(\phi_i) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(c) D_j^*(\phi_i)\\ =& \sum_{i=1}^{p} \psi_i(c) B_j^*(\omega_i),\ j = p+1, \cdots, 2n-k.\end{aligned} \tag{6.2.6B}$$

线性方程组 (6.2.5), (6.2.6B), (6.2.7) 为恰有 $2n$ 个未知量 $\alpha_1(c), \cdots, \alpha_n(c), \beta_1(c), \cdots, \beta_n(c)$ 的 $2n$ 个方程.

引理 6.2.2 对任意 $c \in (a,b)$, 线性方程组 (6.2.5) 等价于线性方程组 (6.2.5), (6.2.6A).

证明 显然 (6.2.5) 与 (6.2.6A) 的任一解仍然为 (6.2.5) 的解. 仅需证: 如果 $\alpha_1(c), \cdots, \alpha_n(c), \beta_1(c), \cdots, \beta_n(c)$ 为 (6.2.5) 的解, 则必为 (6.2.6A) 的解.

设 ϕ 为

$$\phi(s)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(c)\phi_i(s)-\sum_{i=1}^{p}\psi_i(c)\omega_i(s),\quad a\leqslant s\leqslant c,$$

$$\phi(s)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i(c)\phi_i(s)-\sum_{i=1}^{p}\psi_i(c)\omega_i(s),\quad c<s\leqslant b.$$

固定整数 $1\leqslant j\leqslant p$, 则由上式推知

$$\int_a^b\tau^*\phi(s)\psi_j(s)ds=\int_a^b\Big[-\sum_{i=1}^{p}\psi_i(c)\psi_i(s)\Big]\psi_j(s)ds=-\psi_j(c),\qquad(*)$$

另一方面，由 Green 公式，有

$$\begin{aligned}&\int_a^b\tau^*\phi(s)\psi_j(s)ds=\int_a^c\tau^*\phi(s)\psi_j(s)ds+\int_c^b\tau^*\phi(s)\psi_j(s)ds\\
=&\sum_{l,m=0}^{n-1}F_c^{lm}(\tau^*)\phi^{(l)}(c)\psi_j^{(m)}(c)-\sum_{l,m=0}^{n-1}F_a^{lm}(\tau^*)\phi^{(l)}(a)\psi_j^{(m)}(a)\\
&+\sum_{l,m=0}^{n-1}F_b^{lm}(\tau^*)\phi^{(l)}(b)\psi_j^{(m)}(b)-\sum_{l,m=0}^{n-1}F_c^{lm}(\tau^*)\phi^{(l)}(c)\psi_j^{(m)}(c).\end{aligned}$$

再由 (6.2.16) 及 ϕ 的定义，有

$$\begin{aligned}\int_a^b\tau^*\phi(s)\psi_j(s)ds=&\sum_{l=0}^{n-1}\alpha_{jl}^*\phi^{(l)}(a)+\sum_{l=0}^{n-1}\beta_{jl}^*\phi^{(l)}(b)\\
&-\sum_{l,m=0}^{n-1}F_c^{lm}(\tau^*)\Big[\phi^{(l)}(c^+)-\phi^{(l)}(c^-)\Big]\psi_j^{(m)}(c)\\
=&\sum_{l=0}^{n-1}\alpha_{jl}^*\Big[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(c)\phi_i^{(l)}(a)-\sum_{i=1}^{p}\psi_i(c)\omega_i^{(l)}(a)\Big]\\
&+\sum_{l=0}^{n-1}\beta_{jl}^*\Big[\sum_{i=1}^{n}\beta_i(c)\phi_i^{(l)}(b)-\sum_{i=1}^{p}\psi_i(c)\omega_i^{(l)}(b)\Big]\\
&-\sum_{l,m=0}^{n-1}F_c^{lm}(\tau^*)\Big[\sum_{i=1}^{n}\beta_i(c)\phi_i^{(l)}(c)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(c)\phi_i^{(l)}(c)\Big]\psi_j^{(m)}(c).\end{aligned}$$

从而由 (6.2.5), 有

$$\begin{aligned}\int_a^b\tau^*\phi(s)\psi_j(s)ds=&\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(c)C_j^*(\phi_i)+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(c)D_j^*(\phi_i)-\sum_{i=1}^{p}\psi_i(c)B_j^*(\omega_i)\\
&-\sum_{l,m=0}^{n-1}F_c^{lm}(\tau^*)\big[\delta_{l,n-1}b_n(c)^{-1}\big]\psi_j^{(m)}(c)\end{aligned}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(c)C_j^*(\phi_i)+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(c)D_j^*(\phi_i)-\sum_{i=1}^{p}\psi_i(c)B_j^*(\omega_i)$$
$$-F_c^{n-1,0}(\tau^*)b_n(c)^{-1}\psi_j(c).$$

再由 $F_c^{n-1,0}(\tau^*)=b_n(c)$, 得

$$\int_a^b \tau^*\phi(s)\psi_j(s)ds=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(c)C_j^*(\phi_i)+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(c)D_j^*(\phi_i)$$
$$-\sum_{i=1}^{p}\psi_i(c)B_j^*(\omega_i)-\psi_j(c), \qquad (**)$$

结合 (*), (**), 得 (6.2.6A). □

引理 6.2.3 对 $c=a$ 或 $c=b$, 线性方程组 (6.2.5) 等价于线性方程组 (6.2.5) 与 (6.2.6A).

证明 设 $c=a$, $\alpha_1(a),\cdots,\alpha_n(a),\beta_1(a),\cdots,\beta_n(a)$ 满足 (6.2.5), 我们需证它们也满足 (6.2.6A).

定义

$$\phi(s)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i(a)\phi_i(s)-\sum_{i=1}^{p}\psi_i(a)\omega_i(s),\quad s\in[a,b].$$

则 $\phi\in H^n[a,b]$. 固定 $1\leqslant j\leqslant p$, 则

$$\int_a^b \tau^*\phi(s)\psi_j(s)ds=\int_a^b\Big[-\sum_{i=1}^{p}\psi_i(a)\psi_i(s)\Big]\psi_j(s)ds=-\psi_j(a). \qquad (*)$$

另一方面, 由 (6.2.12), (6.2.14) 及 (6.2.15) 有

$$\int_a^b \tau^*\phi(s)\psi_j(s)ds=B_j^*(\phi)=\sum_{l=0}^{n-1}\alpha_{jl}^*\phi^{(l)}(a)+\sum_{l=0}^{n-1}\beta_{jl}^*\phi^{(l)}(b)$$
$$=\sum_{l=0}^{n-1}\alpha_{jl}^*\Big[\sum_{i=1}^{n}\beta_i(a)\phi_i^{(l)}(a)-\sum_{i=1}^{p}\psi_i(a)\omega_i^{(l)}(a)\Big]$$
$$+\sum_{l=0}^{n-1}\beta_{jl}^*\Big[\sum_{i=1}^{n}\beta_i(a)\phi_i^{(l)}(b)-\sum_{i=1}^{p}\psi_i(a)\omega_i^{(l)}(b)\Big]$$
$$=\sum_{l=0}^{n-1}\alpha_{jl}^*\Big[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(a)\phi_i^{(l)}(a)+\delta_{l,n-1}b_n(a)^{-1}\Big]$$
$$+\sum_{l=0}^{n-1}\beta_{jl}^*\Big[\sum_{i=1}^{n}\beta_i(a)\phi_i^{(l)}(b)\Big]-\sum_{i=1}^{p}\psi_i(a)B_j^*(\omega_i)$$
$$=\sum_{l=1}^{n}\alpha_i(a)C_j^*(\phi_i)+\alpha_{j,n-1}^*b_n(a)^{-1}+\sum_{l=1}^{n}\beta_i(a)D_j^*(\phi_i)$$

$$-\sum_{i=1}^{p}\psi_i(a)B_j^*(\omega_i).$$

由 (6.2.12), 有

$$\begin{aligned}\alpha_{j,n-1}^*b_n(a)^{-1} &= -\sum_{m=0}^{n-1}F_a^{n-1,m}(\tau^*)\psi_j^m(a)b_n(a)^{-1}\\ &= -F_a^{n-1,0}(\tau^*)\psi_j(a)b_n(a)^{-1}\\ &= -\psi_j(a),\end{aligned}$$

其中 $F_a^{n-1,0}(\tau^*)=b_n(a)$. 于是得

$$\begin{aligned}\int_a^b\tau^*\phi(s)\psi_j(s)ds = &\sum_{l=1}^{n}\alpha_i(a)C_j^*(\phi_i)+\sum_{l=1}^{n}\beta_i(a)D_j^*(\phi_i)\\ &-\sum_{i=1}^{p}\psi_i(a)B_j^*(\omega_i)-\psi_j(a).\end{aligned}\tag{**}$$

结合 (*) 与 (**), 得到 $c=a$ 时的 (6.2.6A). 对 $c=b$, 类似可证. □

定理 6.2.2 对任意 $c\in[a,b]$, $(2n+p)\times 2n$ 线性方程组 (6.2.5), (6.2.6), (6.2.7) 等价于 $2n\times 2n$ 线性方程组 (6.2.5), (6.2.6B), (6.2.7).

证明 由引理 6.2.2 与引理 6.2.3 立得结论. □

对于 $c\in[a,b]$, 为唯一求解 $(2n+p)\times 2n$ 线性方程组 (6.2.5), (6.2.6), (6.2.7), 我们需讨论与其等价的 $2n\times 2n$ 线性方程组 (6.2.5), (6.2.6B), (6.2.7). 设

$$\gamma_i(c)=\beta_i(c)-\alpha_i(c),\ i=1,2,\cdots,n.$$

方程 (6.2.5) 可重写成为

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\phi_i^{(j)}(c)\gamma_i(c)=0,\ j=0,1,\cdots,n-2,\\ \sum_{i=1}^{n}\phi_i^{(n-1)}(c)\gamma_i(c)=b_n(c)^{-1}.\end{cases}\tag{6.2.17}$$

引理 6.2.4 对任意 $c\in[a,b]$, $n\times n$ 线性方程组 (6.2.17) 存在唯一的一组解 $\gamma_1(c),\cdots,\gamma_n(c)$, 且作为 c 的函数 $\gamma_i(\cdot)\in H^n[a,b]$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

证明 设

$$\phi(s)=\begin{pmatrix}\phi_1(s) & \phi_2(s) & & \phi_n(s)\\ \phi_1'(s) & \phi_2'(s) & & \phi_n'(s)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \phi_1^{(n-1)}(s) & \phi_2^{(n-1)}(s) & \cdots & \phi_n^{(n-1)}(s)\end{pmatrix},$$

下证

$$\det\phi(s)\neq 0,\ \forall s\in[a,b]. \tag{6.2.18}$$

假如存在 $s_0\in[a,b]$, 使 $\det\phi(s_0)=0$, 则 $\phi(s)$ 的各列向量为线性相关的，故存在不全为零的实数 $c_1,\cdots,c_n$, 使

$$\sum_{i=1}^{n}c_i\phi_i^{(j)}(s_0),\quad j=0,1,\cdots,n-1.$$

令 $u(s)=\sum_{i=1}^{n}c_i\phi_i(s)$, $s\in[a,b]$, 则 $u\neq 0$, $\tau^*u=0$, 且 $u^{(j)}(s_0)=0$ $(j=0,1,\cdots,n-1)$. 由常微分方程存在唯一性定理 (见 [Jo4] p.41, 定理 1.3), $u(s)\equiv 0$. 此为矛盾. 因此 (6.2.8) 成立. 从而 (6.2.17) 存在唯一的一组解 $\gamma_1(c),\cdots,\gamma_n(c)$.

下证 $\gamma_i(\cdot)\in H^n[a,b]$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

(6.2.17) 的系数 $\phi_i^{(j)}(\cdot)\in H^1[a,b]$ $(i=1,2,\cdots,n,\ j=0,1,\cdots,n-1)$, 而 $b_n(\cdot)^{-1}\in H^n[a,b]$, 由 Gramer 法则，知 $\gamma_i(\cdot)\in H^1[a,b]$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

下面用数学归纳法证：对每个整数 $k:0\leqslant k\leqslant n-1$, 有

(i) $\gamma_i(\cdot)\in H^{k+1}[a,b]$ $(i=1,2,\cdots,n)$;

(ii) k 阶导数 $\gamma_i^{(k)}(c)$ 满足 $n\times n$ 线性方程组

$$[A]\qquad\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\phi_i^{(j)}(c)\gamma_i^{(k)}=0,\ j=0,1,\cdots,n-k-2,\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\phi_i^{(j)}(c)\gamma_i^{(k)}(c)=\xi_{kj}(c),\ j=n-k-1,\cdots,n-1,\end{cases}$$

其中函数 $\xi_{kj}(\cdot)\in H^{n-k}[a,b]$.

$k=0$ 时， $[A]$ 变为 (6.2.17), 其中 $\xi_{0,n-1}(c)=b_n(c)^{-1}$.

假设 (i), (ii) 对 $k:0\leqslant k<n-1$ 为真.

下证 (i), (ii) 对 $k+1$ 为真.

因为 $[A]$ 中各项属于 $H^1[a,b]$, 将 $[A]$ 中各项积分，得

$$[B]\qquad\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\phi_i^{(j)}(c)\gamma_i^{(k+1)}(c)+\sum_{i=1}^{n}\phi_i^{(j+1)}(c)\gamma_i^{(k)}(c)=0,\\ \qquad\qquad j=0,1,\cdots,n-k-2;\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\phi_i^{(j)}(c)\gamma_i^{(k+1)}(c)+\sum_{i=1}^{n}\phi_i^{(k+1)}(c)\gamma_i^{(k)}(c)=\xi'_{kj}(c),\\ \qquad\qquad j=n-k-1,\cdots,n-1.\end{cases}$$

将 $[A]$ 中的后 $n-1$ 个方程代入 $[B]$ 中的前 $n-1$ 个方程，得

$$
[C]\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \phi_i^{(j)}(c)\gamma_i^{(k+1)}(c) + 0 = 0,\ j = 0, 1, \cdots, n-k-3, \\ \sum_{i=1}^{n} \phi_i^{(n-k-2)}(c)\gamma_i^{(k+1)}(c) + \xi_{k,n-k-1} = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} \phi_i^{(j)}(c)\gamma_i^{(k+1)}(c) + \xi_{k,j+1} = \xi'_{k,j}(c), \\ \qquad\qquad j = n-k-1, \cdots, n-2. \end{cases}
$$

$[B]$ 中最后一个方程为

$$
[D]\quad \sum_{i=1}^{n} \phi_i^{(n-1)}(c)\gamma_i^{(k+1)}(c) + \sum_{i=1}^{n} \phi_i^{(n)}(c)\gamma_i^{(k)}(c) = \xi'_{k,n-1}(c).
$$

为重写这一方程，将方程

$$
\tau^* \phi_i(c) = \sum_{l=0}^{n} b_l(c)\phi_i^{(l)}(c) = 0,\ i = 1, \cdots, n,
$$

两端乘 $\gamma_i^{(k)}(c)$ 并关于 i 求和

$$
\sum_{i=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} \gamma_i^{(n)}(c) b_l(c)\phi_i^{(l)}(c) = 0,
$$

将其重新整理，得

$$
[E]\quad \sum_{l=0}^{n} b_l(c) \sum_{i=0}^{n} \phi_i^{(l)}(c)\gamma_i^{(k)}(c) = 0.
$$

将 $[A]$ 代入 $[E]$ 得

$$
\sum_{l=n-k-1}^{n-1} b_l(c)\xi_{kl}(c) + b_n(c)\sum_{i=1}^{n} \phi_i^{(n)}(c)\gamma_i^{(k)}(c) = 0,
$$

或者

$$
[F]\quad \sum_{i=1}^{n} \phi_i^{(n)}(c)\gamma_i^{(k)}(c) = -\sum_{l=n-k-1}^{n-1} b_l(c)\xi_{kl}(c) b_n(c)^{-1}.
$$

再将 $[F]$ 代入 $[D]$ 得

$$
[G]\quad \sum_{i=1}^{n} \phi_i^{(n-1)}(c)\gamma_i^{(k+1)}(c) - \sum_{l=n-k-1}^{n-1} b_l(c)\xi_{kl}(c) b_n(c)^{-1} = \xi'_{k,n-1}(c).
$$

因此, 已将 [B] 中方程重写成 [C] 与 [G] 的形式. 具体说, 有

$$
[H]\quad \begin{cases}
\sum_{i=1}^{n} \phi_i^{(j)}(c)\gamma_i^{(k+1)}(c) = 0,\ j = 0, 1, \cdots, n-k-3, \\
\sum_{i=1}^{n} \phi_i^{(n-k-2)}(c)\gamma_i^{(k+1)}(c) = -\xi_{k,n-k-1}(c) \equiv \xi_{k+1,n-k-2}(c), \\
\sum_{i=1}^{n} \phi_i^{(j)}(c)\gamma_i^{(k+1)}(c) = \xi'_{k,j}(c) - \xi_{k,j+1}(c) \equiv \xi_{k+1,j}(c), \\
\qquad\qquad j = n-k-1, \cdots, n-2. \\
\sum_{i=1}^{n} \phi_i^{(n-1)}(c)\gamma_i^{(k+1)}(c) = \xi'_{k,n-1}(c) + \sum_{l=n-k-1}^{n-1} b_l(c)\xi_{kl}(c)b_n(c)^{-1} \\
\qquad\qquad \equiv \xi_{k+1,n-1}(c).
\end{cases}
$$

在线性方程组 [H] 中, 系数 $\phi_i^{(j)}(\cdot) \in H^1[a,b]$, 而下列项

$$\xi_{k+1,n-k-2}(c), \cdots, \xi_{k+1,n-1}(c)$$

属于 $H^{n-k-1}[a,b] \subset H^1[a,b]$. 因而由 Cramer 法则, $\gamma_i^{(k+1)}(\cdot) \in H^1[a,b]$, 从而 $\gamma_i(\cdot) \in H^{k+2}[a,b]$, 因此, 知

$$\gamma_i(\cdot) \in H^n[a,b], \quad i = 1, 2, \cdots, n. \qquad \square$$

如果将 $\alpha_i(c) = \beta_i(c) - \gamma_i(c), i = 1, \cdots, n$ 代入 (6.2.6B) 与 (6.2.7), 它们变为

$$\sum_{i=1}^{n} B_j^*(\phi_i)\beta_i(c) = \sum_{i=1}^{p} \psi_i(c)B_j^*(\omega_i) + \sum_{i=1}^{n} C_j^*(\phi_i)\gamma_i(c),$$
$$(j = p+1, \cdots, 2n-k) \tag{6.2.19}$$

与

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i(c)\int_a^b \phi_i(s)\phi_j(s)ds$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \psi_i(c)\int_a^b \omega_i(s)\phi_j(s)ds + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(c)\int_a^c \phi_i(s)\phi_j(s)ds,\ j = 1, \cdots, q. \tag{6.2.20}$$

将 $\gamma_1(c), \cdots, \gamma_n(c)$ 看作已知数, 则 (6.2.19) 与 (6.2.20) 形成一个有 n 个未知量 $\beta_1(c), \cdots, \beta_n(c)$ 的 $n \times n$ 线性方程组.

引理 6.2.5　对于每个 $c \in [a,b]$, $n \times n$ 线性方程组 (6.2.19), (6.2.20) 有唯一的一组解 $\beta_1(c), \cdots, \beta_n(c)$ 且 $\beta_i(\cdot) \in H^n[a,b](i = 1, 2, \cdots, n)$.

证明　任意固定 $c \in [a,b]$, 设 $\beta_1^0, \cdots, \beta_n^0$ 为 (6.2.19), (6.2.20) 相应齐次方程组的解, 即

$$[A] \qquad \sum_{i=1}^{n} B_j^*(\phi_i)\beta_i^0 = 0,\ j = p+1, \cdots, 2n-k,$$

$$[B] \qquad \sum_{i=1}^{n} \int_a^b \phi_i(s)\phi_j(s)ds\beta_i^0 = 0,\ j = 1, 2, \cdots, q.$$

令 $\phi(s) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^0 \phi_i(s),\ s \in [a,b]$, 则显然 $\phi \in \text{span}\{\phi_1, \cdots, \phi_n\}$. 由 (6.2.15), 得

$$B_j^*(\phi) = 0, \quad j = 1, \cdots, p;$$

由 $[A]$ 有

$$B_j^*(\phi) = 0, \quad j = p+1, \cdots, 2n-k$$

且由 $[B]$ 有

$$(\phi, \phi_j) = 0,\ j = 1, 2, \cdots, q.$$

因此, $\phi \in N(L^*) \cap N(L^*)^{\perp}$, 从而 $\phi(s) \equiv 0,\ s \in [a,b]$ 且 $\beta_i^0 = 0,\ i = 1, 2, \cdots, n$.

因为 (6.2.19), (6.2.20) 为正方形线性方程组且系数行列式不为零, 从而存在唯一的一组解 $\beta_1(c), \cdots, \beta_n(c)$.

在 (6.2.19), (6.2.20) 中, 左端的系数为常数, 而右端的函数 (作为 c 的函数) 属于 $H^n[a,b]$, 应用 Cramer 法则, 知 $\beta_i(\cdot) \in H^n[a,b]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. □

定理 6.2.3 对于每个 $c \in [a,b]$, 等价线性方程组 (6.2.5), (6.2.6), (6.2.7) 与 (6.2.5), (6.2.6B), (6.2.7) 有唯一的一组解 $\alpha_1(c), \cdots, \alpha_n(c), \beta_1(c), \cdots, \beta_n(c)$, 且对每个 $c \in (a,b)$, 广义 Green 函数可表示为

$$\begin{cases} G(c,s) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(c)\phi_i(s) - \sum_{i=1}^{p} \psi_i(c)\omega_i(s), & a \leqslant s < c, \\ G(c,s) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \beta_i(c)\phi_i(s) - \sum_{i=1}^{p} \psi_i(c)\omega_i(s), & c < s \leqslant b. \end{cases}$$

证明 由定理 6.2.2, 知方程组 (6.2.5), (6.2.6),(6.2.7) 等价于方程组 (6.2.5), (6.2.6B), (6.2.7).

由引理 6.2.4, 6.2.5 可知线性方程组 (6.2.17), (6.2.19), (6.2.20) 有唯一的一组解 $\gamma_1(c), \cdots, \gamma_n(c), \beta_1(c), \cdots, \beta_n(c)$. 由此, 可知 (6.2.5), (6.2.6B), (6.2.7) 有唯一的一组解 $\alpha_1(c), \cdots, \alpha_n(c), \beta_1(c), \cdots, \beta_n(c)$, 其中 $\alpha_i(c) = \beta_i(c) - \gamma_i(c)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 再由引理 6.2.4, 引理 6.2.5 可知 $\alpha_i(\cdot), \beta_i(\cdot) \in H^n[a,b]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

对每个 $c \in (a,b)$, 已证存在 $\alpha_i(\cdot), \beta_i(\cdot), i = 1, 2, \cdots, n$, 使得 (6.2.4) 中两个表达式成立, 这些数量亦为 (6.2.5), (6.2.6), (6.2.7) 的唯一解. □

定理 6.2.4 函数 $G(a,\cdot)$ 满足边值条件 $B_i^*(u) = \alpha_{i,n-1}^* b_n(a)^{-1}, i = 1, 2, \cdots, 2n-k$, 及 $B_i(\tau^* u) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, k$, 且

$$G(a,s) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(a)\phi_i(s) - \sum_{i=1}^{p} \psi_i(a)\omega_i(s),\ a \leqslant s \leqslant b.$$

函数 $G(b,\cdot)$ 满足边界条件 $B_i^*(u)=-B_{i,n-1}^*b_n(b)^{-1}, i=1,2,\cdots,2n-k$, 及 $B_i(\tau^*u)=0,\ i=1,2,\cdots,k$, 而且

$$G(b,s)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(b)\phi_i(s)-\sum_{i=1}^{p}\psi_i(b)\omega_i(s),\ a\leqslant s\leqslant b.$$

证明 设

$$\phi(s)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i(a)\phi_i(s)-\sum_{i=1}^{p}\psi_i(a)\omega_i(s),\ a\leqslant s\leqslant b.$$

显然, $\phi\in H^n[a,b]$, 且

$$\tau^*\phi(s)=-\sum_{i=1}^{p}\psi_i(a)\psi_j(s)\in N(L)\subset H^n[a,b],$$

于是, 由 $N(L)$ 的定义, $B_j(\tau^*\phi)=0\ (j=1,2,\cdots,k)$. 对 $j=1,2,\cdots,2n-k$, 有

$$\begin{aligned}B_i^*(\phi)&=\sum_{i=1}^{n}\beta_i(a)C_j^*(\phi_i)+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(a)D_j^*(\phi_i)-\sum_{i=1}^{p}\psi_i(a)B_j^*(\omega_i)\\&=\sum_{l=0}^{n}\alpha_{jl}^*\Big[\sum_{i=1}^{n}\beta_i(a)\phi_i^{(l)}(a)\Big]+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(a)D_j^*(\phi_i)-\sum_{i=1}^{p}\psi_i(a)B_j^*(\omega_i).\end{aligned}$$

由 (6.2.5), 有

$$\begin{aligned}B_i^*(\phi)=&\sum_{l=0}^{n-1}\alpha_{jl}^*\Big[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(a)\phi_i^{(l)}(a)+\delta_{l,n-1}b_n(a)^{-1}\Big]\\&+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(a)D_j^*(\phi_i)-\sum_{i=1}^{p}\psi_i(a)B_j^*(\omega_i)\\=&\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(a)C_j^*(\phi_i)+\alpha_{j,n-1}^*b_n(a)^{-1}\\&+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(a)D_j^*(\phi_i)-\sum_{i=1}^{p}\psi_i(a)B_j^*(\omega_i)\\=&\ \alpha_{j,n-1}^*b_n(a)^{-1}\quad(\text{由 } (6.2.6)).\end{aligned}$$

下面证 $\phi=G(a,\cdot)$.

由 (6.2.7), 知 $\phi\in R(L)$, 而由定理 6.1.1, 知 $G(a,\cdot)\in R(L)$. 任取 $u\in D(LL^*)$ 且设 $v=L^*u=\tau^*u$, 显然, $u\in D(L^*)$ 且 $v=\tau^*u\in D(L)\cap N(L)^{\perp}$. 由已证结果, $\tau^*\phi\in N(L)$. 应用 Green 公式, 有

$$\int_a^b\tau(\tau^*u(s))\phi(s)ds=F_b(\tau)(v,\phi)-F_a(\tau)(v,\phi).\tag{$*$}$$

选一个函数 $\psi \in H^n[a,b]$ 使得 $\psi^{(j)}(a) = \psi^{(j)}(b) = 0$ $(j = 0, 1, \cdots, n-1)$, 且 $\psi^{(n-1)}(a) = b_n(a)^{-1}$, 则

$$B_j^*(\psi) = \alpha_{j,n-1}^* b_n(a)^{-1}, \ j = 1, 2, \cdots, 2n-k,$$

于是

$$\phi - \psi \in H^n[a,b] \text{ 且 } B_j^*(\phi - \psi) = 0, \ j = 1, \cdots, 2n-k.$$

因此, $\phi - \psi \in D(L^*)$, $(*)$ 式可重写成

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \tau(\tau^* u(s))\phi(s)ds \\
&= \underline{F_b(\tau)(v, \phi - \psi)} + \underbrace{F_b(\tau)(v, \psi)}_{0} - \underline{F_a(\tau)(v, \phi - \psi)} - F_a(\tau)(v, \psi) \\
&= -F_a(\tau)(v, \psi) \\
&= -\sum_{l=0}^{n-1} F_a^{l,n-1}(\tau) v^{(l)}(a) \phi^{(n-1)}(a) \\
&= -F_a^{0,n-1}(\tau) v(a) \psi^{(n-1)}(a) \\
&= -(-1)^{n-1} a_n(a) v(a) b_n(a)^{-1} \\
&= v(a) = \tau^* u(a).
\end{aligned}$$

再由引理 6.1.11, 有

$$\int_a^b \tau(\tau^* u(s))\phi(s)ds = \int_a^b G(a,s)\tau(\tau^* u(s))ds.$$

因此，得到

$$\int_a^b \tau(\tau^* u(s))\big[\phi(s) - G(a,s)\big]ds = 0, \quad \forall u \in D(LL^*).$$

因为 $R(LL^*) = R(L)$, 得

$$\phi(\cdot) - G(a,\cdot) \in R(L)^\perp \cap R(L),$$

因此

$$\phi(s) = G(a,s), \quad a \leqslant s \leqslant b.$$

同样可证有关 $G(b,s)$ 的结论. □

将上述结果综合起来，便得到刻画广义 Green 函数的主要定理之一.

定理 6.2.5 在 $H^n[a,b]$ 中存在唯一的一组函数 $\alpha_i(t), \beta_i(t)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 使广义 Green 函数 $G(t,s)$ 具有表示:

$$G(t,s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)\phi_i(s) - \sum_{i=1}^p \psi_i(t)\omega_i(s), \quad a \leqslant s < t \leqslant b,$$

$$G(t,s)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i(t)\phi_i(s)-\sum_{i=1}^{p}\psi_i(t)\omega_i(s),\quad a\leqslant t<s\leqslant b.$$

函数 $\alpha_i(t),\beta_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 为线性方程组 (6.2.5), (6.2.6), (6.2.7) 或等价线性方程组 (6.2.5), (6.2.6), (6.2.7) 对 $t=c$ 的唯一一组解.

证明　由定理 6.2.3 与定理 6.2.4 得到. □

推论 6.2.6　对每个点 $c:a\leqslant c\leqslant b$, 有

$$\tau^*G(t,s)=-\sum_{j=1}^{p}\psi_j(c)\psi(s),\quad s\in[a,b].$$

例　$L^2[a,b]$ 中的二阶微分算子 L 定义为

$$D(L)=\{u\in H^2[0,1]\mid u'(0)=u'(1)=0\},\ Lu=\tau u=u''.$$

这里 $\tau=\tau^*$ 且 $L=L^*$, 而

$$N(L)=N(L^*)=\text{span}\{1\},\quad p=q=1.$$

选取

$$\psi_1(t)=1,\ \psi_2(t)=t,\ \phi_1(s)=1,\ \phi_2(s)=s.$$

显然，$\psi_1=\phi_1$ 形成 $N(L)=N(L^*)$ 的正交基. 再取

$$\omega_1(s)=\frac{1}{2}s^2,\quad \theta_1(t)=\frac{1}{2}t^2,$$

则 $\tau^*\omega_1=\psi_1$ 且 $\tau\theta_1=\phi_1$.

确定 $L=L^*$ 的自然边界边条为

$$B_1(u)=B^*(u)=\int_0^1 u''(t)\cdot 1dt=u'(1)-u'(0).$$

于是，我们可用

$$B_2(u)=B_2^*(u)=u'(0).$$

注意 $B_1(\phi)=B_1^*(\phi)=0$, 对 $\phi\in\text{span}\{1,t\}$.

从方程 (6.2.17) 开始，可以很容易求出函数 $\gamma_1(t)$ 与 $\gamma_2(t)$：

$$\begin{cases}\phi_1(t)\gamma_1(t)+\phi_2(t)\gamma_2(t)=0,\\ \phi_1'(t)\gamma_1(t)+\phi_2'(t)\gamma_2(t)=1,\end{cases}$$

或者

$$\begin{cases}\gamma_1(t)+\gamma_2(t)=0,\\ \qquad\quad\ \gamma_2(t)=1,\end{cases}$$

因此，有

$$\gamma_2(t)\equiv 1,\ \gamma_1(t)=-t.$$

下面 $\beta_1(t)$ 与 $\beta_2(t)$ 可由 (6.2.19) 与 (6.2.20) 求出：

$$\begin{cases} B_2^*(\phi_1)\beta_1(t)+B_2^*(\phi_2)\beta_2(t) \\ =\psi_1(t)B_2^*(\omega_1)+C_2^*(\phi_1)\gamma_1(t)+C_2^*(\phi_2)\gamma_2(t), \\ \beta_1(t)+\int_0^1 sds\cdot\beta_2(t)=\int_0^1\frac{1}{2}s^2ds-t\int_0^t ds+\int_0^t sds. \end{cases}$$

因此，得

$$\begin{cases} \beta_2(t)=1, \\ \beta_1(t)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}t^2. \end{cases}$$

从而

$$\begin{cases} \alpha_1(t)=\beta_1(t)-\gamma_1(t)=t-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}t^2, \\ \alpha_2(t)=\beta_2(t)-\gamma_2(t)=0. \end{cases}$$

由定理 3.2.5, 对 $0\leqslant s<t\leqslant 1$, 有

$$\begin{aligned} G(t,s)&=\alpha_1(t)\phi_1(s)+\alpha_2(t)\phi_2(s)-\psi_1(t)\omega_1(s) \\ &=t-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}s^2. \end{aligned}$$

而当 $0\leqslant t<s\leqslant 1$, 时，有

$$\begin{aligned} G(t,s)&=\beta_1(t)\phi_1(s)+\beta_2(t)\phi_2(s)-\psi_1(t)\omega_1(s) \\ &=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}t^2+s-\frac{1}{2}s^2. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{cases} G(t,s)=t-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}s^2, & 0\leqslant s<t\leqslant 1, \\ G(t,s)=s-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{2}t^2, & 0\leqslant t<s\leqslant 1. \end{cases}$$

□

§6.3 $L^p(\Omega)(1<p<(2n/n-2))$ 中半线性椭圆方程 Neumann 边值问题的最佳逼近解

讨论

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\Big)=f(x,u(x)), & x\in\Omega, \\ \frac{\partial u(x)}{\partial\nu_A}=0, & x\in\Gamma, \end{cases} \tag{6.3.1}$$

的 Neumann 边值问题. 这里 $\Omega\subset R^n$ $(n\geqslant 3)$ 为有界区域， Γ 是 Ω 的 C^2- 光滑流形边界， $a_{ij}=a_{ji}\in C^\infty(\Omega)$, $f:\Omega\times R\to R$ 满足 Caratheodary 条件 (见 [Ze]), 且

$$|f(x,u)| \leqslant a|u|^{p/q} + b(x), \quad x \in \Omega,\ u \in R, \tag{6.3.2}$$

其中 $a > 0, b \in L^q(\Omega)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $\dfrac{2n}{n+2} \leqslant q < \infty$.

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_A} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \cos(\widehat{\nu, x_i}),$$

其中 ν 是 Γ 处的单位法向量，$(\widehat{v, x_i})$ 是向量 ν 与 x_i 的方向之间的夹角，且存在一个 $\lambda > 0$, 使得

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2,\ \forall \xi \in R^n \backslash \{0\},\ x \in \Omega. \tag{6.3.3}$$

由 $\dfrac{2n}{n+2} \leqslant q < \infty$ 得 $1 < p \leqslant \dfrac{2n}{n+2}$, 由 Soblev 嵌入定理，我们有下面的嵌入

$$W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega). \tag{6.3.4}$$

若 $1 < p < \dfrac{2n}{n+2}$, 则嵌入算子是紧的 (见 [Ad]), 由 (6.3.4) 式，得

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow (W^{1,2}(\Omega))^*, \tag{6.3.5}$$

这里 $(W^{1,2}(\Omega))^*$ 是 $W^{1,2}(\Omega)$ 的对偶空间.

因为，对任意 $u \in L^p(\Omega)$, 有 $f(\cdot, u(\cdot)) \in L^q(\Omega)$, 且 Caratheodary 映射 $u \mapsto F(u) = f(\cdot, u(\cdot))$ 是从 $L^p(\Omega)$ 到 $L^q(\Omega)$ 中的有界连续映射 (见 [Ze]), 进一步，对任意 $u \in L^p(\Omega)$, 由 [ZFC] 中第二章定理 1.4, 存在 $r > 0$ 和 $M > 0$, 使得

$$\int_\Omega |f(x,u(x))|^q dx \leqslant M\left(\frac{1}{r^p}\int_\Omega |u(x)|^p dx + 1\right). \tag{6.3.6}$$

函数 $u \in W^{1,2}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ 称为方程 (6.3.1) 的弱解，如果对任意 $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, 有 (见 [Ev])

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_\Omega f(x,u(x))v(x)dx. \tag{6.3.7}$$

如果

$$\left\{u \in W^{1,2}(\Omega) \,\middle|\, \int_\Omega f(x,u(x))dx = 0\right\} = \varnothing,$$

那么方程 (6.3.1) 无解 (见 [Ev]). 若对任意常数 c, $f(\cdot, u(\cdot))$ 满足

$$f(x,u(x)) = f(x,u(x)+c),\ x \in \Omega,\ u \in W^{1,2}(\Omega)$$

(例如，$f(x,u(x)) = g(x,\nabla u(x)) + h(x)$, $x \in \Omega$), 则 $u(x) + c$ 亦为方程 (6.3.1) 的一个弱解，因此，一般情况下，方程 (6.3.1) 的求解问题是不适定的.

定义 6.3.1 如果 $u \in W^{1,2}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ 是下面 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) = f(x,u(x)) - \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega f(x,u(x))dx, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial \nu_A} = 0, & x \in \Gamma \end{cases} \tag{6.3.8}$$

的一个弱解，且它满足条件

$$\int_\Omega |u(x)|^{p-1}\text{sgn } u(x)dx = 0, \tag{6.3.9}$$

则 u 称为方程 (6.3.1) 的伪弱解.

注记 当 $p = 2, a_{ij}(x) = \delta_{ij}$ 时，相应奇异控制问题由 J.L.Lions 在 [Li] 中详细研究.

设

$$D(A) = \left\{u \in W^{1,2}(\Omega) \subset L^p(\Omega) \middle| Au \in L^q(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial \nu_A}\Big|_\Gamma = 0\right\}, \tag{6.3.10}$$

这里 A 和 $\dfrac{\partial}{\partial \nu_A}$ 按分布意义满足

$$\begin{cases} Au = -\sum_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_A} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\widehat{\nu, x_j}), \quad u \in W^{1,2}(\Omega). \end{cases} \tag{6.3.11}$$

设 $F(u) = f(\cdot, u(\cdot))$ 是 Caratheodary 映射，则方程 (6.3.1) 等价于算子方程

$$Au = F(u),\ u \in D(A).$$

引理 6.3.1 设 $R(A)$ 和 $N(A)$ 是算子 A 分别在 $L^q(\Omega)$ 和 $L^p(\Omega)$ 中的值域与零空间，则

(i) $R(A)$ 是 $L^q(\Omega)$ 中的闭集，且

$$R(A) = \left\{f \in L^q(\Omega) \middle| \int_\Omega f(x)dx = 0\right\}, \tag{6.3.12}$$

(ii) $N(A)$ 是 $L^p(\Omega)$ 中的闭集，且

$$N(A) = \left\{u \in L^p(\Omega) \middle| u(x) \equiv c,\ c \in R^1\right\}. \tag{6.3.13}$$

证明 见 [Tr] 第三章. □

引理 6.3.2 A 是从 $D(A)$ 到 $L^q(\Omega)$ 中的闭线性算子，且 $D(A)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠.

证明 因为 $C_0^\infty(\Omega) \subset D(A)$ 且在 $L^p(\Omega)$ 中稠，因此 $D(A)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠.

以下证明 A 是从 $D(A)$ 到 $L^q(\Omega)$ 中的闭算子.

设 $\{u_n\} \subset D(A)$, 且在 $L^p(\Omega)$ 中有

$$u_n \to u \in L^p(\Omega),\ n \to \infty.$$

记 $f_n = Au_n \in L^q(\Omega)$, 设 $f_n \to f \in L^q(\Omega)$, $n \to \infty$. 由于 $R(A)$ 是 $L^q(\Omega)$ 中的闭集，故存在一个 $u_0 \in D(A)$, 使得

$$\begin{cases} Au_0(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial \nu_A} = 0, & x \in \Gamma \end{cases}$$

按分布意义成立. 对任意 $w \in C_0^\infty(\Omega)$, 由 A 的正则性，存在一个 $h \in C_0^\infty(\Omega)$, 使得

$$\begin{cases} Ah(x) = w(x), & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial h(x)}{\partial \nu_A} = 0, & x \in \Gamma. \end{cases} \tag{6.3.14}$$

由于 $a_{ij} = a_{ji}(i = 1, 2, \cdots)$, 在 $L^p(\Omega)$ 中有 $u_n \to u$, $n \to \infty$, 应用 Green 公式，我们有

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_0(x)w(x)dx &= \int_\Omega u_0(x)Ah(x)dx \\
&= \int_\Omega Au_0(x)h(x)dx + \int_\Gamma u_0(x)\frac{\partial h(x)}{\partial \nu_A}dx - \int_\Gamma h(x)\frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu_A}dx \\
&= \int_\Omega Au_0(x)h(x)dx = \int_\Omega f(x)h(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(x)h(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega Au_n(x)h(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\int_\Omega u_n(x)Ah(x)dx + \int_\Gamma \frac{\partial u_n(x)}{\partial \nu_A}h(x)dx - \int_\Gamma u_n(x)\frac{\partial h(x)}{\partial \nu_A}dx\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n(x)w(x)dx = \int_\Omega u(x)w(x)dx.
\end{aligned}$$

由于 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠，故

$$u(x) = u_0(x),\ \text{a.e. } x \in \Omega$$

且

$$u \in W^{1,2}(\Omega),\ Au = f \in L^q(\Omega).$$

由 [Tr] 中迹定理知，迹算子

$$\frac{\partial}{\partial \nu_A}\Big|_\Gamma : W^{1,2}(\Omega) \to W^{-\frac{1}{2},2}(\Gamma).$$

是线性连续的，因此

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right|_\Gamma - \left.\frac{\partial u_0}{\partial \nu_A}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial}{\partial \nu_A}\right|_\Gamma (u-u_0) = 0,$$

即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial u_0}{\partial \nu_A}\right|_\Gamma = 0.$$

于是

$$u \in D(A),\ f = Au. \qquad \square$$

定理 6.3.1 $u \in D(A) \subset L^p(\Omega)$, $1 < p \leqslant \dfrac{2n}{n-2}$ 是方程 $A(v) = F(v)$ 的最佳逼近解，即

(i) $A(u) = \pi_{R(A)}(F(u))$;

(ii) $\|u\|_p = \min\left\{\|v\|_p \,|A(v) = \pi_{R(A)}(F(u)),\ v \in D(A)\right\}$ 的充分必要条件是 u 为方程 (6.3.1) 的伪弱解.

证明 必要性. 由引理 6.3.1, 有

$$\begin{aligned} N(A)^\perp &= \left\{f \in L^q(\Omega)\Big|\int_\Omega f(x)u(x)dx = 0,\ u \in N(A)\right\} \\ &= \left\{f \in L^q(\Omega)\Big|\int_\Omega f(x)dx = 0\right\} = R(A). \end{aligned}$$

因此 $R(A)^\perp = N(A)^{\perp\perp} = N(A)$. 若 $u \in D(A)$ 是方程 $A(u) = F(u)$ 的一个最佳逼近解，则

$$A(u) = \pi_{R(A)}(F(u)).$$

应用推论 1.2.11, $F(u)$ 有唯一的分解

$$F(u) = \pi_{R(A)}(F(u)) + f_1, \tag{6.3.15}$$

这里 $f_1 \in F_Y^{-1}(R(A)^\perp)$. 因为 $X = L^p(\Omega)$, $Y = L^q(\Omega)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, 所以

$$F_Y^{-1}(v) = F_{L^q}^{-1}(v) = F_{L^p}(v) = F_X(v).$$

由对偶映射的定义，我们有

$$F_{L^p}(v)(x) = \begin{cases} \dfrac{|v(x)|^{p-1}\mathrm{sgn}\ v(x)}{\|v\|^{p-2}}, & v \neq \theta, \\ \theta, & v = \theta. \end{cases}$$

因此 $f \in F_Y^{-1}(R(A)^\perp) = F_{L^p}(N(A))$ 蕴涵

$$f_1 = c_1,\quad c_1\text{是常数}. \tag{6.3.16}$$

对 (6.3.15) 式两边在 Ω 上取积分，我们得

$$c_1 = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x,u(x))dx. \tag{6.3.17}$$

由 (6.3.15), (6.3.16) 及 (6.3.17) 式，得

$$\pi_{R(A)}(F(u)) = F(u) - f_1 = f(x,u(x)) - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x,u(x))dx. \tag{6.3.18}$$

由于 $u \in D(A)$, $A(u) = \pi_{R(A)}(F(u))$, 我们有

$$\begin{cases} A(u)(x) = f(x,u(x)) - \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega f(x,u(x))dx, & x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial \nu_A} = 0, & x \in \Gamma. \end{cases} \tag{6.3.19}$$

按分布意义成立. 由 A^M 的定义，我们得

$$\begin{aligned} u &= A^M F(u) = A^M A A^M F(u) \\ &= A^M A(u) = (I - \pi_{N(A)})A^{-1}A(u) \\ &= u - \pi_{N(A)}(u). \end{aligned}$$

因此 $\pi_{N(A)}(u) = 0$, 另一方面，由推论 1.2.11, u 有唯一解

$$u = \pi_{N(A)}(u) + u_1 = u_1,$$

这里 $u_1 \in F_X^{-1}(N(A)^\perp)$, 因此 $F_{L^p}(u) \in N(A)^\perp = R(A)$. 从而有

$$\int_\Omega |u(x)|^{p-1}\text{sgn } u(x)dx = 0. \tag{6.3.20}$$

充分性. 若 $u \in D(A) \subset L^p(\Omega)$ 是伪弱解，则

$$\begin{cases} A(u)(x) = f(x,u(x)) - \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega f(x,u(x))dx, & x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial \nu_A} = 0, & x \in \Gamma \end{cases}$$

按分布意义成立，且

$$|u|^{p-1}\text{sgn } u \in R(A) = N(A)^\perp.$$

由 (6.3.15)~(6.3.16) 式的同样判据，有

$$Au = \pi_{R(A)}(F(u)).$$

对任意 $v \in D(A)$, $A(v) = \pi_{R(A)}(F(u))$, 我们有 $u - v \in N(A)$. 于是由 Hölder 不等式，得

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx = \int_\Omega u(x)|u(x)|^{p-1}\text{sgn } u(x)dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega v(x)|u(x)|^{p-1}\text{sgn}\, u(x)dx \\
&\leqslant \|v\|_p\Big(\int_\Omega |u(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

因此

$$\|u\|_p = \min\{\|v\|_p \mid A(v) = \pi_{R(A)}(F(u)),\ v \in D(A)\}.$$

即 u 是方程 $A(v) = F(v)$ 的最佳逼近解. □

定理 6.3.2 如果 $1 < p < \dfrac{2n}{n-2}(n \geqslant 3)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $p < q < \infty$, 那么对不适定半线性椭圆方程 (6.3.1) 的 Neumann 边值问题, 存在一个最佳逼近解.

证明 设 A 和 $D(A)$ 分别由 (6.3.10), (6.3.11) 给出, 对任意 $g \in L^q(\Omega)$, 存在唯一的 $\pi_{R(A)}(g)$, 取 $x \in A^{-1}\pi_{R(A)}(g)$, 则存在唯一的 $\pi_{N(A)}(x)$, 因此

$$u = (I_{D(A)} - \pi_{N(A)})(x)$$

也是唯一的. 由定理 4.1.2, 我们有 $u = A^M(g)$. 由 A^M 的齐性及引理 1.3.1, 存在 $L > 0$, 对任意 $g \in L^q(\Omega)$, 使得

$$\|u\|_p = \|A^M(g)\|_p \leqslant L\|g\|_q. \tag{6.3.21}$$

对任意 $u \in L^p(\Omega)$, $F(u) \in L^q(\Omega)$, 存在唯一的 $v \in D(A) \subset L^p(\Omega)$, 使得

$$v = A^M F(u).$$

设 $T = A^M F$, 则

$$T : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega),\ 1 < p < \frac{2n}{n-2},$$

是一个紧连续映射. 因为 $1 < p < q$, 我们可以令 $R > \max\{L, r\}$ 充分大, 使得

$$\frac{R^q}{ML^q} - \frac{R^p}{r^p} \geqslant 1, \tag{6.3.22}$$

这里 M 和 r 按 (6.3.6) 式给出. 对任意 $u \in B_R(\theta)$, 我们有

$$\|v\|_p = \|T(u)\|_p = \|A^+F(u)\|_p \leqslant L\|F(u)\|_q.$$

由 (6.3.6) 和 (6.3.22), 得

$$
\begin{aligned}
\|F(u)\|_q &\leqslant \Big(\int_\Omega |f(x,u(x))|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant \Big[M\Big(\frac{1}{r^p}\int_\Omega |u(x)|^p dx + 1\Big)\Big]^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant \Big[M\Big(\frac{\|u\|_p^p}{r^p} + 1\Big)\Big]^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant \Big[M\Big(\frac{R^p}{r^p} + 1\Big)\Big]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \left[M\left(\frac{R^q}{ML^q}\right)\right]^{\frac{1}{q}}$$
$$= \frac{R}{L}.$$

因此

$$\|v\|_p \leqslant R.$$

即 $TB_R(\theta) \subset B_R(\theta)$. 由 Schauder 不动点定理，存在一个 $u \in B_R(\theta)$, 使得

$$u = A^+F(u).$$

因此 $u \in D(A) \subset L^p(\Omega)$, $A(u) = \pi_{R(A)}(F(u))$, 且

$$\|u\|_p = \min\{\|v\|_p \mid A(v) = \pi_{R(A)}(F(u)),\ v \in D(A)\}. \qquad \square$$

【注　释】

§6.1~§6.2　对于 $L^2[a,b]$ 中 n 阶两点微分算子， J. Locker, 从 1973 年到 1986 年, 研究了其正交广义逆 (Moore-Penrose 度量广义逆的特例) 的广义 Green 函数的表示 [Jo1~Jo4]. 此两节内容取自 [Jo4].

§6.3　王玉文及王辉 [WWh3] 利用 Banach 空间中具有闭值域的稠定闭线性算子的 Moore-Penrose 度量广义逆，研究了 $L^p[a,b]\left(1 < p < \dfrac{2n}{n-2}\right)$ 中不适定半线性椭圆方程 Neumann 问题的最佳逼近解, 将度量广义逆与 Schauder 不动点定理结合，证得最佳逼近解的存在性，并给出最佳逼近解的充要条件.

参 考 文 献

[Ad] R. A. Adams. Soblev Space. New York: Academic Press, 1975

[AF] J. P. Aubin, H. Frankowska. Set-valued Analysis. Systems Control, Birknäuser, 1990

[BG] A. Ben-Israel, T. N. E. Greville. Generalized Inverses: Theory and Applications. New York: John Wiley, 1974

[BP] V. Barbu, T. Precpuanu. The Convexity and Optimization in Banach Spaces. Romania, Buscuresti: Aca. Rep. Soc., 1978

[Ca] S. R. Caradus. Generalized Inverse and Operator Theory, Queen's papers in Pure and Appl. Math., 50(Qeen's University, Kingston, Onrario), 1978

[Cai] 蔡东汉. 线性算子的 Drazin 广义逆. 数学杂志, 1985, 5(1): 81~87

[Cao] 曹重光. 关于态映射的广义逆. 数学学报, 1991, 34(3): 403~407

[CM1] S. L. Campbell, Jr. C. D. Meyer. Generalized Inverse of Linear Transformations. London: Pitman, 1979; New York: Dover, 1991

[CM2] S. L. Campbell, Jr. C. D. Meyer. Continuity properties of the Drazin inverse. Linear Algebra Appl., 1975, 10: 77~83

[CWX] G. L. Chen, M. S. Wei, Y. F. Xue. Perturbation analysis of the least solution in Hilbert spaces. Linear Algebra Appl., 1996, 244: 69~80

[CX] G. L. Chen, Y. F. Xue. Perturbation analysis for the operator equation $Tx = b$ in Banach spaces. J. Math. Anal. Appl., 1997, 212: 107~125

[DH] J. Ding, L. J. Huang. On the perturbation analysis of the least solution in Hilbert spaces. Linear Algebra Appl., 1994, 212/213: 487~500

[Di] 定光桂. Banach 空间引论. 北京：科学出版社, 1984

[Dr] M. P. Drazin. Pseudoinverse in associative rings and semigroups. Amer. Math. Monthly, 1958, 65: 506~514

[DS] N. Dunford, J. T. Schwartz. Linear Operators, I, II. Pure and Appl. Math, Vol.VII New York: Interscience, 1958, 1963

[En] P. Enflo. A counter example to the appoximation problem in Banach Space. Acta Math., 1973, 130: 309~317

[Ev] L. C. Evans. Partial Differential Equations. Graduate studies in Mathematics, ISSN 1065~7339, V. 19. Rhode Island: Amer. Math. Soci. Pnov., 1998

[Fre] I. Fredolm. Sur Une Classe Dequtions Funtionelles. Acta Math., 1903, 27: 365~390

[GKW] N. C. Gonzàlez, J. J. Koliha and Y. M. Wei. Error Bounds for Perturbation of the Drazin Inverse of Closed Operators with Equal Spectral Projections. Applicable Analysis, Vol. 81: 915~928

[GM] I. C. Gohberg, A. S. Markus. Two theorems on the opening between subspace of a Banach space. (Russian), Uspekhi Math. Nauk., 1959, 89: 135~140

[Gr] G. W. Groetsch. Generalized Inverse of Linear Operators. New York: Marcel Dekker, 1977

[Ho1] R. B. Holmes. A Coure on Optimization and Best Approximation. New York: Lect. Notes in Math., 1972

[Ho2] R. B. Holmes. Geometric Functional Analysis and Its Application. New York, Heideberg, Berlin: Spring-Verlage, 1975

[HS] 何旭初，孙文瑜. 广义逆矩阵引论. 南京：江苏科学出版社， 1990

[Jo1] J. Locker. The method of least square for boundary value problems. Trans. Amer. Math. Soc., 1971, 39: 57~68

[Jo2] J. Locker. On constructing least squares solution to two-piont boundary value problems. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, 203: 175~183

[Jo3] J. Locker. The generalized Green's function for an nth order linear differential operator. Trans. Amer. Math. Soc., 1977, 228: 243~268

[Jo4] J. Locker. Functional Analysis and Two-point Differential Operators. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1986

[Ka] T. Kato. Perturbation Theory for Linear Operators. Berlin Heidelberg. New York: Springer, 1976

[KM] M. I. Kadets, B. S. Mityagin. Complemented subspaces in Banach spaces. Russian Math. Surveys, 1973, 28: 77~95

[Ko] J. J. Koliha. A Generalized Drazin Inverse. Glasgow Math. J., 1996, 38: 367~381

[KR] J. J. Koliha, V. Rakŏcević. Continuity of the Drazin Inverse II. Studia Math., 1998, 131: 167~177

[KT] J. J. Koliha, T. D. Tran. The Drazin inverse for closed linear operators. J. Operator Theory, 2001, 46: 323~336

[Ku] 匡蛟勋. 线性算子 Drazin 广义逆的表示与逼近. 高等学校计算数学学报，1982, 4(2): 97~106

[KW] 孔秀英，王玉文. 集值映射的最小不动点定理及其应用. 应用泛函分析学报， 2002, 4(4): 332~339

[Li] J. L. Lions. Remark on the Theory of Optimal Control of Distributed System. New York: Academic Press, 1979

[LiW] 李志伟，王玉文. Banach 空间中非光滑指标奇异最优控制. 系统科学与数学，1995, 15(4): 301~311.

[LuW] 刘晶，王玉文. Banach 空间中线性流形的单值度量投影部分. 应用泛函分析学报，2001, 3(1): 91~96

[LN1] S. J. Lee, M. Z. Nashed. Least-squares solutions of multivalued linear operator equation in Hilbert spaces. J. Approx. Theory., 1983, 38(4): 381~391

[LN2] S. J. Lee, M. Z. Nashed. Gradient method for nondensely defined closed unbounded linear operator. Proc. Amer. Math. Soc., 1983, 88(3): 428~435.

[LN3] S. J. Lee, M. Z. Nashed. Representation theory of topological selections of multival-

ued linear mapping with applications to differential equation. J. Integral Equations Appl., 1988, 1(4): 479~499

[LN4] S. J. Lee, M. Z. Nashed. Constrained least-squares solutions of linear inclusions and singular control problem in Hilbert spaces. Appl. Math. Optim., 1989, 19(3): 225~242

[LT] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. On the complemented subspaces problem. Israel. Math., 1971, 9: 263~269

[LuW] 栾从海, 王玉文. Banach 空间中拟线性投影算子. 数学的实践与认识, 2004, 34(6): 166~171

[Ma1] J. P. Ma. Continuously sufficient and necessary condition for Moore-Penrose inverse A_x^+. Science in China, 1990, 33A(11): 1294~1302

[Ma2] J. P. Ma. (1,2)-Inverse of operators between Banach spaces and local conjugacy theorem. Chin. Ann. Math., 1999, 20B(1): 57~62

[Ma3] J. P. Ma. Rank theorems of operators between Banach spaces, Science in China, 2000, 43A(1): 1~5

[Ma4] J. P. Ma. Local conjugacy theorem, rank theorems in advanced calculus and a generalized principle for constucting Banach manifold. Science in China, 2000, 43A(12): 1233~1237

[Ma5] J. P. Ma. A generalized preimage theorem in global analysis. Science in China (Series A), 2001, 44(3): 299~303

[Mar] A. S. Marbus. On some properties of Linear Operators, Connected with the notion of gap. (Russian), Kishinev, Uchenye Zapiski Universiteta, 1959, 39: 265~272

[MCS] J. P. Ma, W. P. Cao and G. Z. Song. On the necessary and sufficient conditions of the continuity of M-P inverses A_x^+. Chin. Ann. Math., 1992, 13B(2): 251~256

[Mo] E. H. Moore. On the reciprocal of the general algebra matrix (Abstract). Bull. Amer. Math. Soc., 1920, 26: 394~395

[Mur] F. J. Murray. On the complementary manifolds and projections in spaces L_p and $l_{p'}$. Trans. Amer. Math. Soc., 1937, 41: 138~172

[Na1] M. Z. Nashed. Ed. Generalized Inverses and Applications. New York/London: Academic Press, 1976

[Na2] M. Z. Nashed. A new approach to classification and regularization of ill-posed operator equations, Inverse and Ill-posed problems, (sankt wolfgarg, 1986), 53~75, Notes Rep. Math. Sci. Engrg. 4, Boston: Academic Press, MA, 1987

[Na3] M. Z. Nashed. On nonlinear ill-posed problem II, Monotone variational inequalities. Theory and Applications of Nonliear Operators of Accretive and Monotone Type, 230~240, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 178., New York: Dekker, 1986

[Na4] M. Z. Nashed. Inner, outer and generalized inverse in Banach and Hilbert spaces. Numer. Funct. Anal. Optim., 1987, 9: 261~325

[Na5] M. Z. Nashed. Perturbations and approximations for generalized inverses and linear operator equations. In M. Z. Nashed, ed, Generalized inverses and applications, New York: Academic Press, 1976

[NC] M. Z. Nashed, X. J. Chen. Convergence of newton-like method for singular operator equations using outer inverse. Numer. Math., 1993, 66(2): 235～257

[NL] M. Z. Nashed, F. S. Liu. Convergence of regularized solutions of nonlinear ill-posed problems with monotone operators. Partial differential equations and applications, 353～361, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 177, New York: Dekker, 1996

[NV] M. Z. Nashed, G. F. Votruba. A unified approach to generalized inverses of linear operator: II. Extremal and proximinal properties. Bull. Amer. Math. Soc., 1974, 80: 831～835

[NZ] M. Z. Nashed, Y. Zhao. The Drazin inverse for singular evolution equations and partial differential equations. Word Sci. Ser, Appl. Anal., 1992, 1: 441～456

[Pe1] R.Penrose. A generalized inverse for matrices. Proc. Cambridge. Philos, Soc., 1955, 51: 406～413

[Qi] 乔三正. Banach 空间中线性算子的 Drazin 逆. 上海师范学院学报 (自然科学版), 1981, 2: 11～18

[Ra] V. Rakŏcević. Continuity of the Drazin inverse. J. Operator Theory, 1999, 41: 55～68

[Rol] S. Rolewicz. Functional Analysis and Control Theory. PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa: D. Reidel Publishing Company, 1987

[Ru] W. Rudin. Functional Analysis. McGran-Hill. Book Company, 1973

[RW] V. Rakŏcević, Y. M. Wei. The perturbation theory for the Drazin and its applications II. J. Austral. Math. Soc., 2001, 70: 189～197

[Shi] 史树中，凸分析. 上海：上海科学技术出版社， 1990

[Si] I. Singer. The Theory of Best Approximation and Functional Analysis. New York: Spinger Verlag, 1970

[So] A. Sobszyk. Projections in Minkowski and Banach spaces. Duke Math. J., 1941, 8: 78～106

[SFR] B. Simeon, C. Fuhrer and P. Rentrop. The Drazin inverse in multibody system dynamics. Numer. Math., 1993, 64: 521～539

[TL] A. E. Taylor, D. C. Ley. Introdution to Functional Analysis. 2nd editions, New York: Linear, Wiley, 1980

[Tr] F. Treves. Basic Linear Partial Differential Equations. New York: Academic Press Inc., 1975

[Ts1] Y. Y. Tseng. The charateristic value problem of Hermitan functional operators in a non-Hilbert spaces. Doctoral Dissertation in Math. University of Chicago, University of Chicago, 1933

[Ts2] Y. Y. Tseng. Generaliz inverses of unbounded operators between two unitary

spaces. Dokl. Akad. Nauk. SSSR(N.S.), 1941, 67: 431~434

[Ts3] Y. Y. Tseng. Properties and classification of generalized inverses of closed operators, Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N. S.)., 1949, 67: 607~610

[Ts4] Y. Y. Tseng. Sur les solutions des equations operatrices fonctionnelles entre les espaces. Unitaires, C. R. Acad. Sci. Paris, 1949. 228: 640~641

[Ts5] Y. Y. Tseng. Virtual solutions and general inversions. Uspehi. Mat. Nauk. (N. S.), 1956, 11: 213~215

[TW] 唐洋，王玉文. 数理经济中一类纯交经济的需求映射及应用. 数学的实践与认识，2001, 31(4): 459~463

[Wa] Y. W. Wang. The generalized inverse operator in Banach spaces. Bull. Polish. Aca. Sci. Math., 1989, 37(7-12): 433~441

[Wag1] 王国荣. 矩阵与算子广义逆. 北京：科学出版社， 1998

[Wag2] 王国荣. Banach 空间中线性算子的带权 Drazin 逆的逼近方法. 高校计算数学学报，1988, 16: 76~81

[We1] 魏益民. Banach 空间中的 Drazin 逆的表示和扰动, 数学年刊，2000, 21A(1): 33~38

[We2] Y. M. Wei. Index splitting for the Drazin inverse and Singular System. Appl. Math. Comput., 1998, 95: 115~124

[WhW] H. Wang, Y. W. Wang. Metric generalized inverse of linear operator in Banach space. Chin. Ann. Math., 2003, 24B(4): 509~520

[WJ] 王玉文，季大琴. Banach 空间中线性算子的 Tseng 度量广义逆. 系统科学与数学，2000, 20(2): 203~209

[WK] 魏益民，匡蛟勋. Banach 空间中计算线性算子 Drazin 逆的迭代法. 复旦学报，1996, 35: 407~413

[WL] 王玉文，李志伟. Banach 空间中 Moore-Penrose 广义逆与不适定的边值问题. 系统科学与数学， 1995,15(2):175~185

[WLu] Y. W. Wang, J. Liu. Metric generalized inverse of linear maniford and extremal solution of linear inclusion in Banach spaces. J. Math. Anal. Apll. (已排版)

[WLz] 王玉文，李双臻. Banach 空间中线性算子的齐次广义逆. 数学学报， 2005, 48(2): (正排版)

[WP1] Y. W. Wang, Sh. R. Pan. An approxmation problem of the finite rank operator in Banach spaces. Science in China (Series A), 2003, 46(2): 245~250

[WP2] 王玉文，潘少荣. Banach 空间中线性算子 (集值) 度量广义逆及其齐性选择. 数学学报， 2003, 46(3): 273~280

[WP3] 王玉文，潘少荣. Banach 空间中有限秩算子的逼近问题. 中国科学， 2002, 32A(9): 837~841

[Wsy] 王松桂，杨振海. 广义逆矩阵及其应用. 北京：北京工业大学出版社， 1996

[WWa] Y. M. Wei, G. R. Wang. The perturbation theory for the Drazin inverse and its applications. Linear Algebra Appl., 1997, 258: 178~186

[WWh1] 王玉文，王辉. Banach 空间中最小范数控制. 系统科学与数学， 1991, 11(1): 1~6

[WWh2] 王玉文，王辉．Banach 空间中广义正交分解定理与广义可补子空间．数学学报，2001, 44(6): 1045~1050

[WWh3] Y. W. Wang, H. Wang. Least extremal solutions of ill-posed Neumann boundary value problems for semilinear ellipitic equations in $L^p(\Omega)$. (to appear)

[WWQ] G. R. Wang, Y. M. Wei and S. Zh. Qiao. Generalized Inverse: Theory and Computations (广义逆：理论与计算). Beijing / New York: Science Press, 2004

[WWr] Y. W. Wang(王玉文), R. J. Wang (王润洁). Pseusoinverse and Two Objects Optimal Control Problem. Appoxi. et Funct., 1992, 21: 25~34

[WWW] 王玉文，王辉，王润杰．Banach 空间中线性算子的集值度量右逆的表示及应用．应用泛函分析学报，1999, 1(3): 255~260

[WY1] 王玉文，于金凤．Banach 空间中一类度量投影的判据及表达式．数学物理学报，2001, 21A(1): 29~35

[WY2] 王玉文，于金凤．Banach 空间 $L^p(\Omega)$ 中非齐次不适定椭圆边值问题的最小范数极值解．数学物理学报，2001, 21A(2): 191~200

[XWY] 夏道行，吴卓人，严绍宗，舒五昌．实变函数与泛函分析 (下册)．北京：人民教育出版社，1979

[Yo] K. Yosida. Functional Analysis. New York: Springer-Verlag, 1978

[Yu1] 俞鑫泰．Banach 空间几何理论．上海：华东师大出版社，1986

[Yu2] 俞鑫泰．Banach 空间选论．上海：华东师大出版社，1992

[Zao] 赵俊峰．Banach 空间结构理论．武汉：武汉大学出版社，1996

[Ze] E. Zeldle, Nonlinear Functions I-IV. New York-Berlin: Springer, 1988~1990

[ZFC] 钟承奎，范先令，陈文原．非线性泛函分析引论．兰州：兰州大学出版社，1998

[ZSW] 张凯，孙秀梅，王玉文．一类半线性椭圆方程的不适定边值问题的最小极值解．应用泛函分析学报，2002, 4(3): 245~250